

### 3. Topografia subterrânea

Mineração é um termo que abrange os processos, actividades e indústrias cujo objectivo é a extracção de substâncias minerais a partir de depósitos ou massas minerais. Numa interpretação mais lata, podem incluir-se aqui a exploração de petróleo e gás natural e até de água. Como actividade industrial, a mineração é indispensável para a manutenção do nível de vida e avanço das sociedades modernas em que vivemos. Desde os metais às cerâmicas e ao betão, dos combustíveis aos plásticos, equipamentos eléctricos e electrónicos, cablagens, computadores, cosméticos, passando pelas estradas e outras vias de comunicação e muitos outros produtos e materiais que são de utilização quotidiana, todos eles têm origem na actividade da mineração. Pode-se sem qualquer tipo de dúvida dizer que sem a mineração a civilização actual, tal como a conhecemos, não existiria.

A vida de uma exploração mineira (mina ou pedreira) é composta por um conjunto de etapas que se podem resumir a:

- 1) Pesquisa para localização do minério.
- 2) Prospecção para determinação da extensão e valor do minério localizado.
- 3) Estimativa dos recursos em termos de extensão e teor do depósito.
- 4) Planeamento, para avaliação da parte do depósito economicamente extraível.
- 5) Estudo de viabilidade para avaliação global do projecto e tomada de decisão entre iniciar ou abandonar a exploração do depósito.
- 6) Desenvolvimento de acessos ao depósito que se vai explorar.
- 7) Exploração, com vista à extracção de minério em grande escala.
- 8) Recuperação da zona afectada pela exploração de forma a que tenha um possível uso futuro.

Note-se que entre a fase de pesquisa e o início da exploração podem decorrer vários anos ou mesmo décadas, sendo os investimentos necessários nesta fase muito elevados (podendo ser da ordem das centenas de milhões de euros) e o seu retorno não assegurado, o que ilustra bem o risco associado a esta actividade.

Relativamente ao modo de escavação as minas podem dividir-se em dois tipos principais: minas a céu aberto e minas subterrâneas (figura 3.1). A escolha do método de extracção depende em grande parte da localização e forma do depósito mineral, devendo ser escolhido o método mais seguro e ao mesmo tempo mais económico.



figura 3.1. Exemplos de mina a céu aberto e de mina subterrânea

A extração do minério pode ser efectuada por meios mecânicos (por exemplo com escavadoras hidráulicas, figura 3.2.) ou com recurso a explosivos (na grande parte dos casos). As operações executadas com vista à extração dum minério e até ao seu processamento são sequenciais e podem ser resumidas da seguinte forma (no caso de extração com explosivos):

Perfuração – o minério é furado utilizando máquinas de perfuração hidráulicas; a perfuração é executada com diâmetro, comprimento e distâncias entre furos previamente calculadas;

Desmorte – os furos previamente executados são preenchidos (ou carregados) com explosivo, procedendo-se então à detonação deste e conseqüente fragmentação do minério;

Remoção – o minério assim fragmentado é carregado em camiões, vagonetas ou outro meio de transporte, até à instalação de processamento, geralmente situada próximo da mina.



figura 3.2. Extração do minério por meios mecânicos

O processamento mineral ou tratamento dos minérios consiste numa série de processos que têm em vista a separação física dos minerais úteis da ganga (a parte do minério que não tem interesse económico e que é rejeitada) e a obtenção final de um concentrado, com um teor elevado de minerais úteis.

Os métodos utilizados podem ser físicos ou químicos e podem ser divididos de forma aproximadamente sequencial em:

- 1) Fragmentação primária
- 2) Granulação
- 3) Moagem
- 4) Classificação (pode estar incluída entre os vários tipos de fragmentação e concentração)
- 5) Concentração

O produto obtido na fase final de concentração denomina-se concentrado e é o produto final da actividade de uma mina, sendo vendido por um preço estabelecido de acordo, sobretudo mas não só, com o teor de metal que contém.

A topografia subterrânea inclui levantamentos em minas assim como as operações à superfície associadas com esses procedimentos. As diversas formas de acesso ao subsolo (minas) podem agrupar-se em poços, galerias e túneis. As condições de trabalho nas minas e respectivos acessos são muito diferentes das que se verificam à superfície: as poligonais podem ter visadas muito curtas, ao longo de corredores estreitos e poeirentos, a ausência de luz natural, a humidade, a falta de ventilação, o ruído intenso quando a maquinaria está em funcionamento, etc.. O transporte de coordenadas, da orientação e da cota podem ter de ser efectuados através de poços profundos; os movimentos de terras podem afectar a estabilidade das estações previamente estabelecidas. A terminologia utilizada em topografia subterrânea está ilustrada na figura 3.3.:

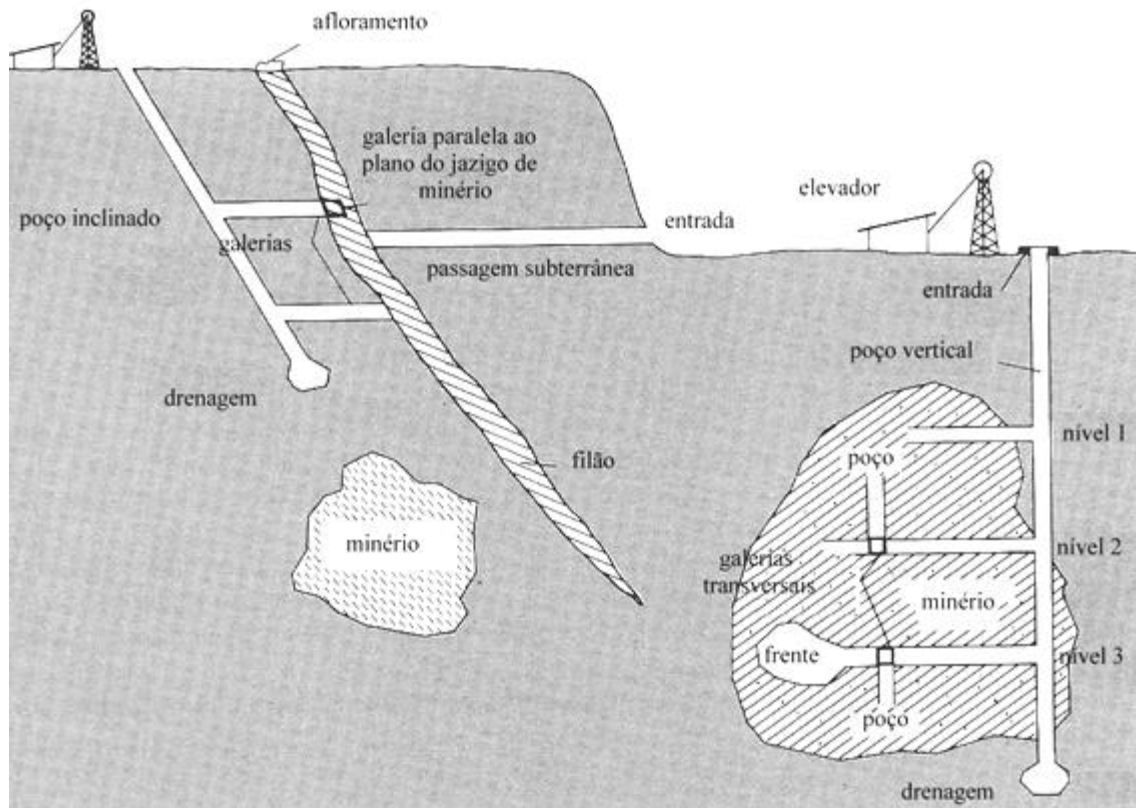
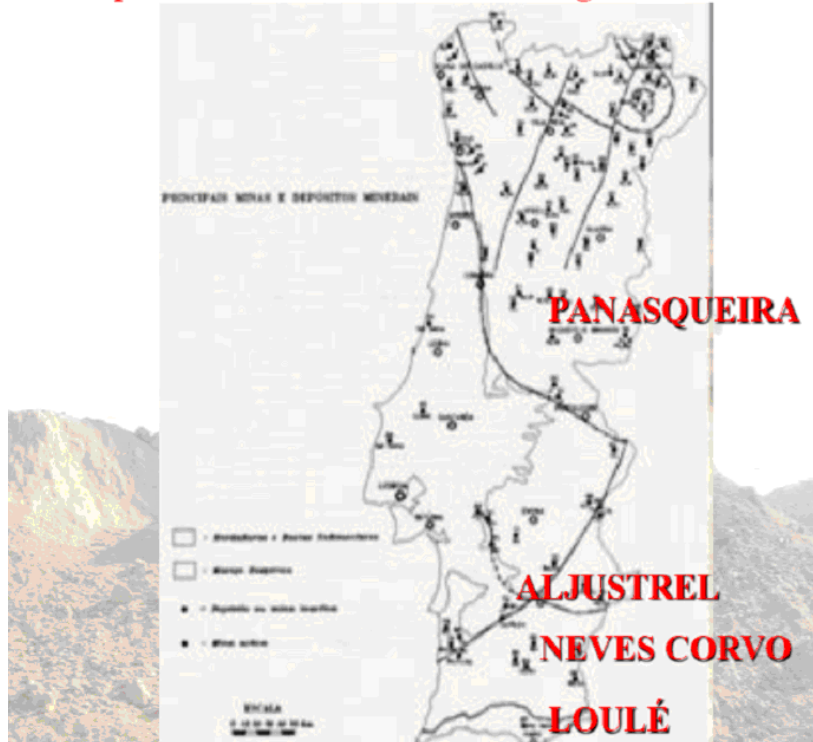


figura 3.3. Secção transversal de uma exploração mineira típica

Os poços são escavações mais ou menos largas e profundas abertas no solo, geralmente para a exploração de um jazigo e em muitos casos constituem a única via de comunicação entre o exterior e o interior de uma mina. Estão geralmente coroados por construções de madeira, metal ou cimento armado denominadas torres ou castelos. A sua forma mais corrente é a circular, pois esta apresenta a resistência máxima às pressões do terreno, podendo o respectivo diâmetro variar entre 1 a 2 metros, para os poços de serviço, até 8 metros para poços de extracção em minas importantes. Outra forma utilizada é a rectangular pois aqui o coeficiente de utilização é bastante mais vantajoso; a secção mais corrente é a de 5 metros por 4 metros, podendo o lado maior atingir os 12 metros nas grandes explorações.

### Principais Minas Subterrâneas Portuguesas



### PRODUÇÃO DAS MINAS METÁLICAS EM PORTUGAL

| ANO              | 2006            |                 | 2007            |                 |
|------------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| <b>Cobre</b>     | <b>328,3 Mt</b> | <b>373,4 M€</b> | <b>449,3 Mt</b> | <b>432,9 M€</b> |
| <b>Estanho</b>   | <b>25 t</b>     | <b>0,11 M€</b>  | <b>50 t</b>     | <b>0,33 M€</b>  |
| <b>Volfrâmio</b> | <b>1.305 t</b>  | <b>15,74 M€</b> | <b>1.460 t</b>  | <b>15,30 M€</b> |
| <b>Zinco</b>     | <b>13.035 t</b> | <b>14,19 M€</b> | <b>52.508 t</b> | <b>39,65 M€</b> |

**PIB de PORTUGAL**  
**2006: 155 277 M€**  
**2007: 162 919 M€**

quadro 3.1. Principais minas subterrâneas em Portugal



quadro 3.2. Minas em actividade, áreas concessionadas ou em processo de concessão, jazigos

Os poços atingem frequentemente várias centenas de metros de profundidade. Alguns, em França, ultrapassam os 1000 metros e a Bélgica possui alguns jazigos muito profundos, superiores a 1300 metros. Actualmente, seguindo o exemplo das explorações petrolíferas, que ultrapassam os 7 ou 8000 metros, e em consequência da maior procura de matérias-primas e do esgotamento de muitas minas, os poços têm tendência a alcançar maior profundidade (na Nova Escócia uma mina de carvão atingiu os 1500 metros; note-se que enquanto as explorações mineiras exigem a presença do homem, o que limita as profundidades a atingir, nas explorações petrolíferas isso não acontece).

Se os poços forem utilizados durante muitos anos, o que é o caso geral, então devem receber um revestimento chamado entivação, que pode ser constituído por materiais clássicos, como a madeira, o tijolo ou o betão mas também o pode ser por aduelas prefabricadas ou tramos de cilindro em ferro fundido ou aço. Sobre esta entivação são apoiadas as guias, de madeira ou metal, constituídas por uma estrutura que sustenta as calhas onde se deslocam as “gaiolas”, que servem indistintamente para a descida ou subida de pessoal e material, para a evacuação do minério e para o envio para o fundo da mina de materiais de construção e enchimento (figura 3.4.). Muitos poços modernos estão equipados com gaiolas de alta velocidade chamadas skips, em que quando uma caixa desce a outra sobe.

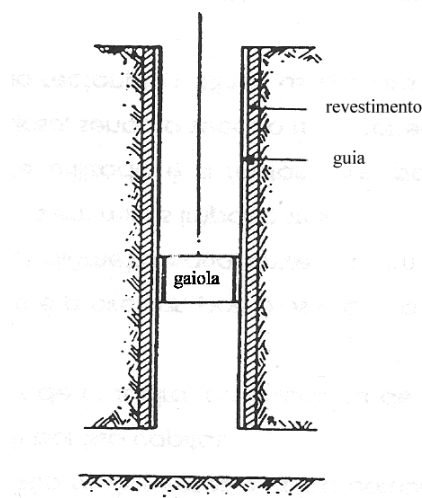


figura 3.4. Acesso à mina através do poço

Os processos de escavação de um poço diferem consoante estes se encontrem em terrenos mais ou menos consistentes. Empregam-se para a perfuração procedimentos muito variados, desde dragas de colher a explosivos. Em terrenos com muita água opera-se utilizando bombagem, câmaras-de-ar comprimido ou métodos de congelação. Geralmente colocam-se duas entivações, a primeira provisória e a segunda definitiva. O procedimento mais utilizado consiste em dispor um entivado de aduelas metálicas contra o terreno, vertendo-se betão entre este e um outro interior, desmontável. Outro processo que oferece maiores garantias de segurança consiste em deixar descer pelo seu próprio peso um entivado circular cuja base, de bordos cortantes, descansa sobre o fundo do poço. Este método tem no entanto limitações devido ao facto de que o atrito do terreno sobre a parede externa do entivado crescer com o quadrado da profundidade, o que não permite que se ultrapassem os 150 metros de profundidade. A figura 3.5. esquematiza a operação de remoção do minério, para a qual é necessária a construção duma torre onde se situa o cabrestante para a extracção dos materiais.

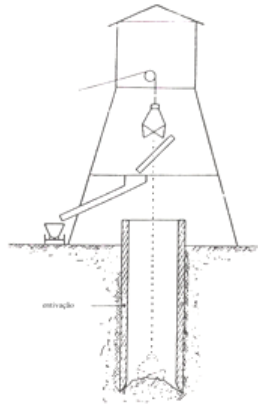


figura 3.5. Extração de minério

As galerias são caminhos subterrâneos que permitem o acesso de pessoal às frentes de extração, assim como o transporte de materiais e dos minérios, nelas se podendo instalar vias férreas, condutas, etc. As galerias estão geralmente providas de suportes; antigamente (figura 3.6.) esses suportes eram de madeira, constituídos por montantes apoiados em soleiras e coroados por travessas (a secção destas galerias era tradicionalmente trapezoidal). Nas instalações mais modernas, utilizam-se suportes metálicos, mais seguros e menos volumosos, ou seguindo a configuração tradicional ou utilizando outras secções. Assim, as galerias principais, que devem ser conservadas ao longo de toda a vida útil da mina, estão marcadas por ferros perfilados, colocados a poucos metros uns dos outros, muitas vezes embebidos em betão, e os arcos superiores correspondentes às travessas, aparafusados aos pés dos marcos. A secção destas galerias é geralmente circular (figura 3.7.) e a drenagem das águas é assegurada por um canal semicircular cuja pendente deve ser o mais regular possível.

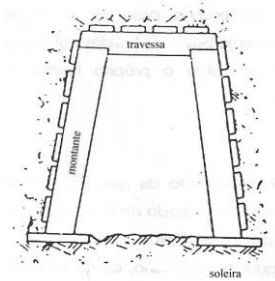


figura 3.6. Galeria com secção trapezoidal

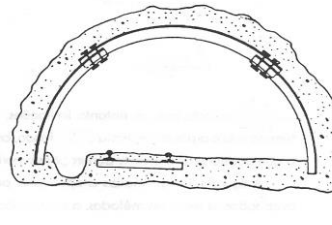


figura 3.7. Galeria com secção circular

As tendências mais recentes apontavam para a construção de galerias mais largas, que permitissem a instalação de vias duplas, mas a partir de 4 metros de largura a sustentação dos tectos torna-se uma obra muito cara e difícil de conservar. Voltou-se portanto à concepção de vias não muito largas.

Os túneis são galerias amplas, abertas para dar passagem a vias de comunicação. A sua construção entra no domínio das chamadas obras públicas e os seus custos atingem valores muito elevados. Nas operações de abertura de um túnel, começa-se por abrir pequenas galerias no eixo do traçado, nas quais se procede seguidamente ao derrube das paredes laterais e conseqüente alargamento; segue-se o revestimento da abóbada e depois a construção dos muros laterais, uma vez limpos os escombros do centro.

As tuneladoras (Tunnel boring machines - TBM) são máquinas utilizadas na escavação de túneis com secção transversal circular. São mecanismos apreciados pela sua eficiência em diversos tipos de subsolo, mostrando uma versatilidade que vai das rochas mais duras até terrenos arenosos. Os diâmetros da secção transversal pode também variar muito: desde 1 metro, realizadas por micro tuneladoras até 14 metros (figura 3.8.).

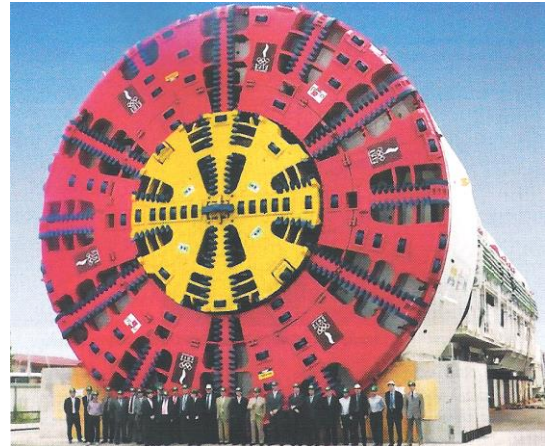


figura 3.8. Exemplos de tuneladora

Outro processo, chamado processo ascendente (figura 3.9.), parte da perfuração duma galeria dita inferior ou de base (G), na qual se perfuram poços verticais (P), para cima, e sobre o eixo de G, abrindo-se depois uma nova galeria, dita superior ou de cabeça (G'). Alarga-se G' arrancando os maciços laterais M e M' e reveste-se a abóbada. Procede-se de igual modo com os maciços N e N' de um e outro lado da galeria. Revestem-se as paredes laterais e a soleira. Uma via construída no interior da galeria G evacua os escombros provenientes de todas as escavações efectuadas.

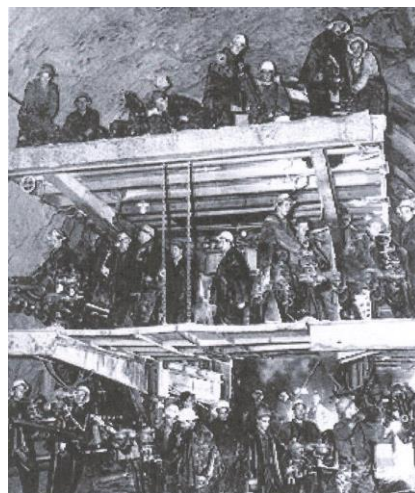
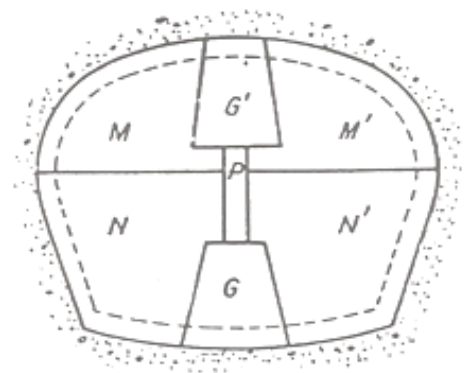


figura 3.9. Abertura de um túnel





O termo mina é normalmente utilizado para designar as explorações de jazigos de minério. Um jazigo está normalmente ligado à superfície por vários poços pois a existência de um único acesso pode ser perigosa. A superfície do terreno sobre a mina constitui o local onde se vão situar as instalações necessárias ao funcionamento do complexo, tais como barracões e armazéns, montes de detritos, além das torres contendo a maquinaria dos elevadores, bombas para a circulação de ar, etc. Geralmente não se consegue explorar o jazigo na sua espessura total utilizando apenas um nível de galerias e opera-se então por andares. Na base de cada andar escava-se uma galeria transversal, que se liga ao poço através de um espaço alargado (figura 3.10.). Quando se atinge o filão a explorar, escavam-se novas galerias, ditas centrais, de onde partem novas galerias que conduzem às frentes de produção. As galerias centrais permitem transportar vagonetes até às galerias transversais e depois até à estações. A frente de ataque ou de corte avança por meio de tramos longitudinais. O tecto da frente é apoiado por meio de madeiramentos ou de apoios metálicos, que se vão retirando à medida que se avança.

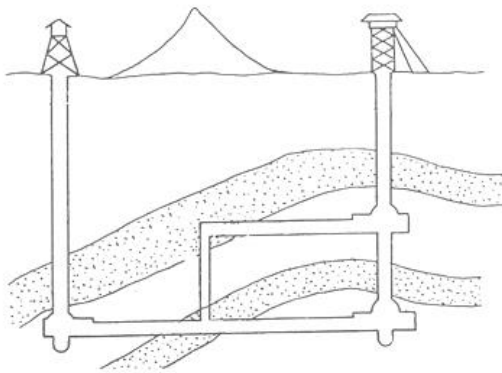


figura 3.10. Poços e galerias para dar acesso às frentes de exploração

Na maioria das vezes o levantamento executado no subsolo deve estar ligado a um sistema de referência na superfície, de forma a criar uma ligação entre as estações topográficas na superfície e no subsolo (figura 3.11.). Além do levantamento topográfico no subsolo, a questão da implantação reveste-se de grande importância. Como exemplo, pode existir a necessidade de que sejam implantadas galerias a uma determinada distância entre cada uma, para que o material entre as mesmas sirva como sustentação; se a implantação destas galerias for executada erroneamente, corre-se o risco de ocorrerem desabamentos. Outro exemplo clássico é a escavação realizada através de duas frentes de trabalho: se houver algum erro na implantação, as duas frentes de escavação podem não se encontrar conforme projectado.

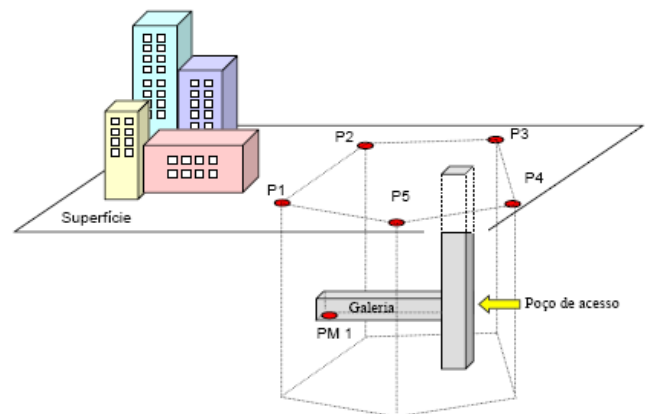


figura 3.11. Localização das estruturas subterrâneas em relação à superfície

As redes de apoio consistem geralmente em poligonais, frequentemente abertas, que percorrem o conjunto de túneis e escavações; por esta razão, e porque as distâncias entre estações são normalmente curtas, da ordem de alguns metros, as poligonais devem ser observadas com extremo cuidado e devem ser confirmadas por outras poligonais independentes.

As estações da rede de controlo horizontal são normalmente materializadas no tecto da mina, perfurando a respectiva superfície e cimentando ou cravando uma peça metálica (figura 3.12.) ou nas paredes laterais da mina, através de uma barra removível, que se insere numa peça metálica (figura 3.13.); estas peças metálicas podem ainda ser utilizadas como referência para estações excêntricas, sendo este último método mais vantajoso pois permite que o aparelho seja estacionado em locais mais convenientes.

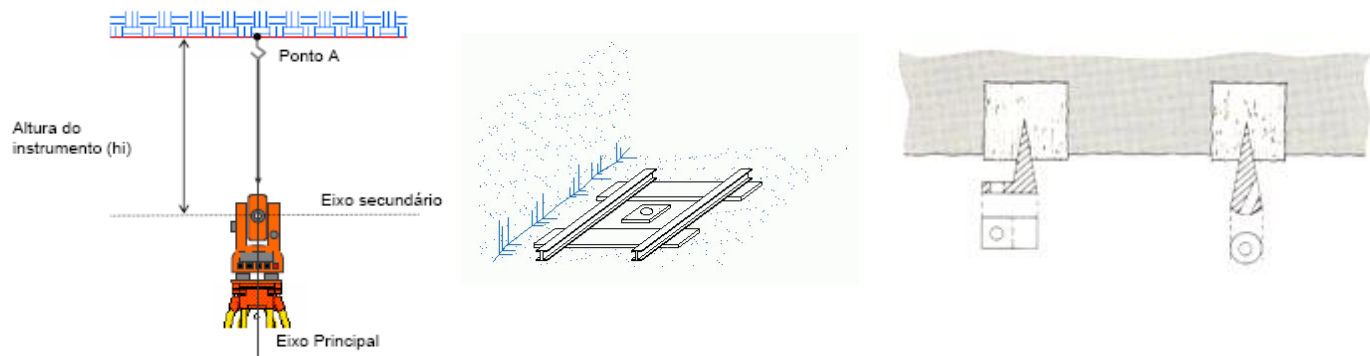


figura 3.12. Materialização do apoio topográfico numa mina, no chão e no tecto

O estacionamento sob as marcas no tecto da mina é mais difícil do que o estacionamento convencional, devido, por exemplo, ao espaço confinado, escuridão e dificuldades de colocação do tripé num terreno irregular. É normalmente realizado utilizando um fio-de-prumo suspenso na marca do tecto, devendo o aparelho possuir uma marca na luneta para permitir a coincidência com a extremidade do fio-de-prumo. Como alternativa, é possível utilizar prumos ópticos zenitais acoplados à estação total (ou que se possa adaptar à base do aparelho), disponíveis como acessório em diversos modelos. As estações totais (ou que se possa adaptar à base do aparelho), disponíveis como acessório em diversos modelos. As estações totais (ou teodolitos) são equipados com iluminação eléctrica nos limbos horizontal e vertical, assim como no retículo.



figura 3.13. Estacionamento sob uma marca na parede de uma mina

O estacionamento e observação em galerias muito inclinadas é difícil ou mesmo impossível sem o recurso a lunetas auxiliares que permitam a realização das pontarias e das leituras; no caso de locais onde não é possível a utilização de tripés, pode utilizar-se uma barra de suporte fixada à parede da mina, que permite um estacionamento rápido do aparelho. A influência de um erro  $\epsilon_L$  (sensibilidade da nívela), expresso em segundos de arco, cometido na horizontalização da estação total, na precisão  $\epsilon_\alpha$  da observação angular pode ter uma grande magnitude; da expressão aproximada

$$\epsilon_\alpha = \epsilon_L \sqrt{(\tan \gamma_1)^2 + (\tan \gamma_2)^2}$$

onde  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  são os ângulos verticais das visadas e  $\epsilon_L$  o erro de horizontalização do teodolito, tem-se, por exemplo, para  $\gamma_1 = \gamma_2 = 40^\circ$  e  $\epsilon_L = 30''$  que  $\epsilon_\alpha = 36''$ , devendo por isso utilizar-se aparelhos com maior sensibilidade.

Se a mina for acessível através de uma passagem subterrânea ou de uma estrada inclinada, o processo de transporte da orientação para o interior da mina é simples, utilizando uma poligonal normal, partindo do apoio geodésico existente na vizinhança da entrada da mina. Frequentemente, no entanto, o único acesso à mina é através de um poço vertical, e neste caso a utilização de uma poligonal normal não é possível.

Exemplo: Num teodolito com luneta excêntrica (figura 3.14.), corrigir o ângulo horizontal  $H_1 = 107^\circ 32'$ , sendo a distância  $d$  igual a 0.12 m,  $MA = 32.20$  m e  $NB = 21.40$  m (distâncias horizontais):

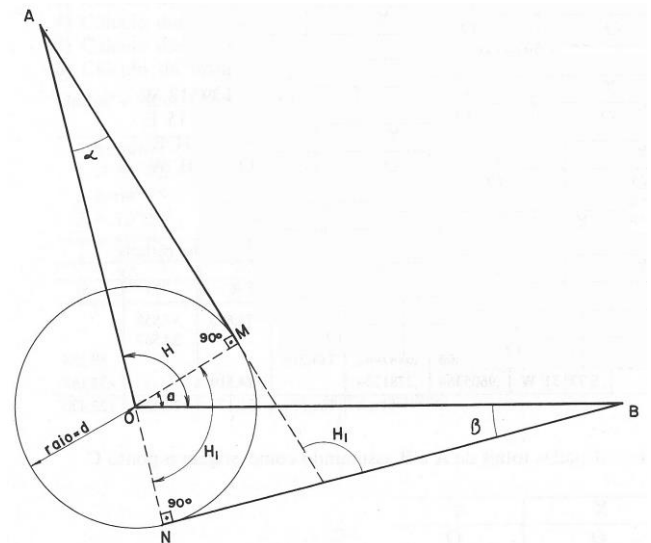
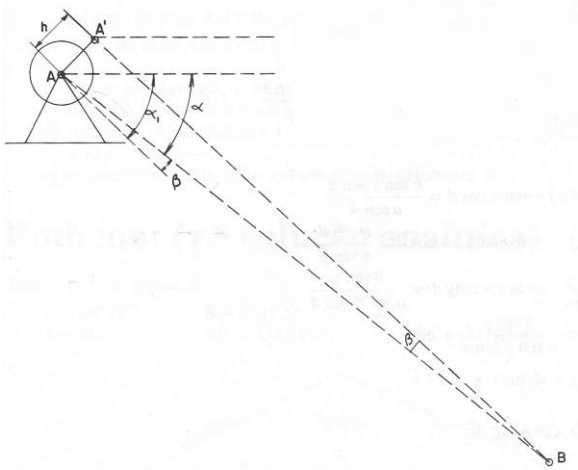


figura 3.14. Com a luneta na posição M aponta-se para A, com a luneta na posição N aponta-se B, obtendo-se  $H_1$  (o teodolito está estacionado no ponto O)

de  $H - a + \alpha = 90^\circ$  e  $H_1 - a + \beta = 90^\circ$  tem-se  $H - a + \alpha = H_1 - a + \beta$ , ou seja,  $H = H_1 + \beta - \alpha$ ;  $\tan \alpha = d / MA = 0.0037267$ , donde  $\alpha = 0^\circ 13'$ ;  $\tan \beta = d / NB = 0.0056075$ , donde  $\beta = 0^\circ 19'$ ; assim,  $H = 107^\circ 32' + 0^\circ 19' - 0^\circ 13' = 107^\circ 38'$

Exemplo: Num teodolito preparado para topografia subterrânea, munido de luneta auxiliar superior (figura 3.15.), calcular a distância horizontal para  $\alpha_1 = -42^\circ 10'$ , sendo a distância  $d$  entre os eixos das duas lunetas igual a 0.12 m e  $A'B=22.40$  m.



$$\tan \beta = h / A'B' = 0.005357 \text{ donde } \beta = 18'$$

$$\alpha = \alpha_1 - \beta = 42^\circ 10' - 18' = 41^\circ 52'$$

$$A'B = \sqrt{22.40^2 + 0.12^2} = 22.40$$

A projecção horizontal de  $A'B$  é  $A'B \cos \alpha = 16.68$  m

(caso não seja efectuada a correcção do ângulo  $\alpha$ , a projecção horizontal de  $A'B$  é igual a  $A'B \cos \alpha_1 = 16.60$  m, ou seja, o erro é igual a 8 cm)

figura 3.15.  $\alpha_1$  é o ângulo lido no círculo vertical;  $\alpha$  é o ângulo vertical correcto;  $A'B'$  é a distância inclinada observada

Para efeitos da determinação do rumo  $R_{E-R}$  de uma direcção definida pelo ponto estação E e uma referência R, é possível utilizar o Sol, medindo a sua distância zenital: considerando o triângulo de posição PZS, definido pelo Polo Norte Celeste (PNC=P), o zénite do observador (Z) e pelo Sol (S) (figura 3.16.), o lado  $PZ = 90^\circ - \phi$ , colatitude da estação, obtém-se de uma carta do local, o lado  $PS = 90^\circ - \delta$  é obtido por interpolação do valor da declinação do Sol a partir das tabelas deste astro, sendo suficiente o conhecimento do instante de observação a menos de uma dezena de minutos e o lado  $ZS = z$ , distância zenital do centro do Sol, mede-se com um teodolito, registando-se igualmente a leitura azimutal  $L_{Sol}^{Az}$  correspondente e a leitura azimutal para a referência R,  $L_R^{Az}$ .

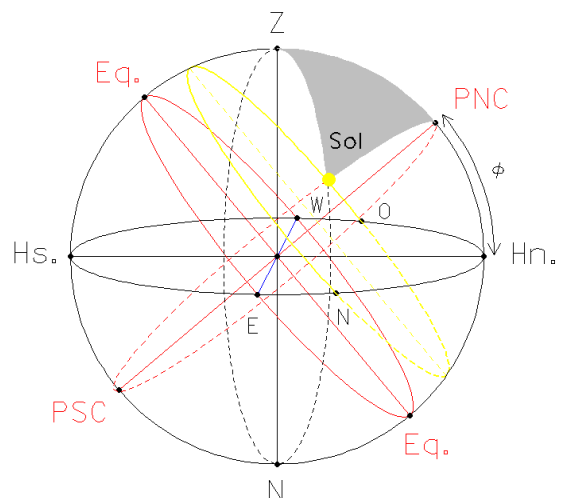


figura 3.16. No exemplo figurado a latitude do lugar =  $40^\circ N$ , declinação do Sol =  $+15^\circ$

Conhecendo-se os três lados do triângulo de posição inicial, pode calcular-se o azimute do Sol,  $Az_{Sol} = PZS$ , medido no plano do horizonte da estação a partir do ponto N, para Oeste (no sentido da rotação diurna), como

$$\cos Az_{Sol} = \frac{\sin \delta_{Sol} - \cos Z_{Sol} \sin \phi}{\cos \phi \sin Z_{Sol}}$$

Estas observações são facilitadas com a colocação sobre a objectiva de um prisma solar de Roelofs, que consiste em dois prismas delgados de pequeno ângulo cujas arestas são perpendiculares entre si, de tal forma que um cobre a metade inferior da objectiva e o outro a metade esquerda. A refração dos raios solares através destes prismas permite que se formem quatro imagens do Sol: a imagem directa dada pelo quadrante não coberto pelos prismas, duas imagens produzidas pelos quadrantes que contêm apenas um prisma e uma imagem produzida pelo quadrante que tem os dois prismas sobrepostos (figura 3.17.). Existe ainda um vidro fumado de forma prismática que centra as quatro imagens do Sol sobre o eixo óptico. Estas quatro imagens dispõem-se em quadrado e sobrepõem-se ligeiramente para formar no centro uma figura simétrica que pode ser visada com o cruzamento dos fios do retículo tanto em azimute como em distância zenital, ficando a linha de pontaria exactamente dirigida para o centro do Sol.

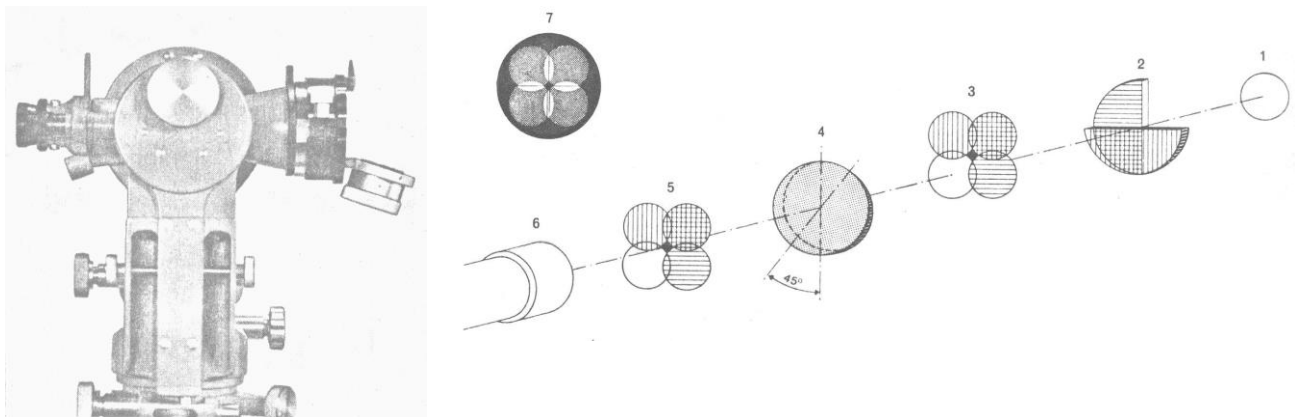


figura 3.17. Prisma de Roelofs rebatido para permitir a pontaria à referência terrestre R; 1-Sol, 2-prismas; 3-refracções; 4-vidro fumado; 5-centragem; 6-objectiva; 7-imagem observada

Em geral são efectuadas três séries de observações. Dado o movimento rápido do Sol, fazem-se 6 pontarias em cada série para melhorar a precisão do método (3 na posição directa e 3 três na posição inversa). Para controlar o rigor das pontarias e do posicionamento do teodolito em estação, bem como a respectiva estabilidade durante as observações, cada série começa com a pontaria à referência R na posição directa da luneta; em seguida efectuam-se as três pontarias ao Sol nessa posição da luneta, invertendo-se então a luneta e repetem-se três pontarias ao Sol; por último visa-se a referência R, não devendo esta leitura azimutal diferir mais de 1' da primeira leitura (a menos de 180°).

Para além do registo das distâncias zenitais e das leituras azimutais, é necessário registar o instante de cada observação, assim como o valor da temperatura e pressão atmosférica no início e no fim das observações com vista ao cálculo da correcção da refração. Em relação à primeira série de observações, sejam  $\bar{z}$  a média das seis distâncias zenitais e  $\bar{Laz}_{Sol}$  a média das 6 pontarias em azimute para o Sol, calculando-se igualmente o instante médio das 6 observações.

A média  $\bar{z}$  deve ser corrigida da refração atmosférica utilizando a expressão

$$\rho^{correctado} = \rho_0 \frac{\text{Pressão atmosférica (mm Hg)}}{760} \frac{1}{1 + 0.00384 \text{ Temperatura (}^\circ\text{C)}},$$

onde  $\rho_0 = 60.07'' \tan \bar{z}_{Sol} - 0.067'' \tan^3 \bar{z}_{Sol}$  é a refração normal. É ainda necessário corrigir a distância zenital da paralaxe  $\pi$ , recorrendo a tabelas ou calculando o respectivo valor através de

$$\pi = 8.8'' \sin \bar{z}_{Sol}.$$

A distância zenital que entra nos cálculos é então  $z = \bar{z} + \rho^{correctado} - \pi$ .

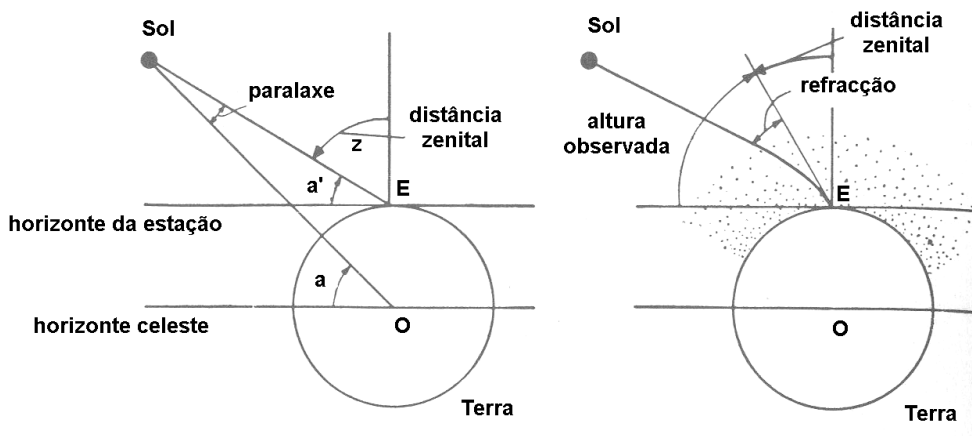


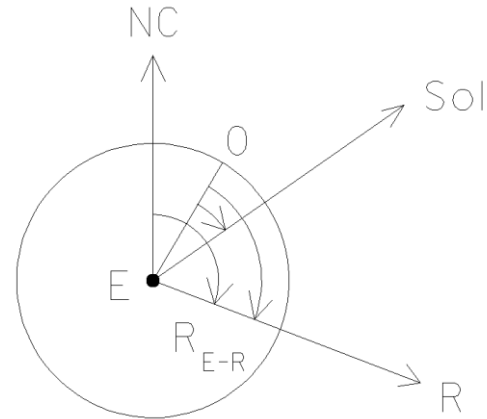
figura 3.18. Efeitos da paralaxe e da refração ( $a = \text{altura} = 90^\circ - z$ )

A diferenciação da fórmula  $\cos Az_{Sol} = (\sin \delta_{Sol} - \cos z_{Sol} \sin \phi) / (\cos \phi \sin z_{Sol})$  mostra que a precisão em azimute é tanto maior quanto mais rapidamente variar a distância zenital do Sol em função do azimute: é pois conveniente não efectuar observações a menos de três horas da passagem do Sol pelo meridiano (meio dia local, quando o Sol atinge a altura máxima). Por outro lado, o Sol não deve ser observada demasiado baixo por causa da incerteza da refração (o Sol deve ter uma altura superior a  $10^\circ$ ).

Sendo  $L_R$  a leitura azimutal relativa à referência R, tendo-se obtido o azimute do Sol para a 1ª série de observações, deduz-se o azimute da direcção E-R a partir de  $Az_{E-R}^1 = Az_{Sol} + Laz_R - Laz_{Sol}$  (figura 3.19.). Repetindo o mesmo

procedimento para as séries 2 e 3, calcula-se a média  $Az_{E-R} = \left( \sum_{i=1}^3 Az_{E-R}^i \right) / 3$ .

figura 3.19. Relação entre o azimute do Sol e o rumo E-R



Finalmente, calculando o valor da convergência de meridianos no ponto estação  $\gamma$ , tem-se  $R_{E-R} = Az_{E-R} + \gamma$ , com  $\gamma = -(\lambda - \lambda_0) \sin \phi$  no caso da projecção de Gauss.

Uma forma alternativa de obter a declinação do Sol (que não a consulta de tabelas) é através da utilização das fórmulas seguintes, que fornecem uma precisão de  $0.01^\circ$  na declinação e  $0.1$  minutos na equação do tempo (fórmulas válidas entre 1950 e 2050), onde A representa o ano, M o mês, D o dia e TU o tempo universal (data civil) correspondente a um dado instante de observação (fracção do dia a partir das  $0^h$  de TU):

$$\begin{cases} a = A - 1, m = M + 12 \text{ se } M \leq 2 \\ a = A, m = M \text{ se } M > 2 \end{cases}$$

$$DJ = \text{INT}[365.25 a] + \text{INT}[30.6001 (m+1)] + D + TU/24 + 1720981.5 \text{ (data juliana)}$$

$$n = DJ - 2451545.0 \text{ (número de dias desde J2000.0)}$$

$$L = 280.460 + 0.9856474 n \text{ (longitude média do Sol corrigida da aberração)}$$

$$g = 357.528 + 0.9856003 n \text{ (anomalia média)}$$

$$L \text{ e } g \in [0, 360^\circ], \text{ acrescentando múltiplos inteiros de } 360^\circ$$

$$\lambda = L + 1.915 \sin g + 0.020 \sin 2g \text{ (longitude ecliptica)}$$

$$\varepsilon = 23.439 - 0.0000004 n \text{ (obliquidade da ecliptica)}$$

$$f = 180^\circ / \pi$$

$$t = \tan^2 (\varepsilon / 2)$$

$$\alpha = \lambda - f t \sin 2\lambda + (f / 2) t^2 \sin 4\lambda \text{ (ascensão recta do Sol)}$$

$$\delta = \sin^{-1}(\sin \varepsilon \sin \lambda) \text{ (declinação do Sol)}$$

$$\text{Equação do tempo} = (L - \alpha) \text{ (tempo solar aparente-tempo solar médio, em minutos de tempo)}$$

É então necessário calcular para o instante de observação da distância zenital do Sol verdadeiro, definida por (ano, mês, dia hora legal), a respectiva declinação, supondo-se conhecidas a latitude e a longitude do ponto estação. Para o efeito vão ser utilizadas as expressões anteriormente apresentadas, função da fracção do dia correspondente ao intervalo compreendido entre as 0<sup>h</sup> de UT e o instante de observação. Convém acertar o relógio, utilizando, por exemplo, o site <http://www.oal.ul.pt/index.php?link=acerto>, obtendo-se a hora legal.

- a) Converter a hora legal para UTC (tempo civil, correspondente à hora do meridiano central do fuso)

$$\begin{cases} \text{se horário de Inverno : UTC = hora legal} \\ \text{se horário de Verão : UTC = hora legal} - 1^h \end{cases}$$

(a hora de Inverno vigora entre a 1<sup>h</sup> UTC do último Domingo de Outubro e a 1<sup>h</sup> UTC do último Domingo de Março seguinte e a hora de Verão vigora entre a 1<sup>h</sup> UTC do último Domingo de Março e a 1<sup>h</sup> UTC do último Domingo de Outubro seguinte).

O Tempo Universal Coordenado (UTC) é a escala de tempo de referência e é derivado do Tempo Atómico Internacional (TAI) calculado pelo Bureau International des Poids et Mesures (BIPM) usando uma rede mundial de relógios atómicos. O UTC, que difere do TAI por um número inteiro de segundos, está na base de todas as actividades mundiais.

O UT1 é a escala de tempo baseada na observação da velocidade de rotação da Terra que, actualmente, é derivado usando VLBI (Very Large Baseline Interferometry). As variações irregulares progressivamente identificadas na velocidade de rotação da Terra conduziram, em 1972, à substituição do UT1 como escala de tempo de referência. No entanto, era desejável manter a diferença UT1-UTC menor que 0.9 segundos, para assegurar a concordância entre as escalas de tempo atómica e astronómica. Desde a adopção deste sistema em 1972 foi necessário adicionar 23 segundos ao UTC; este facto deveu-se, em primeiro lugar, à escolha inicial do valor do segundo (1/86400 do dia solar médio do ano de 1820) e, em segundo lugar, à diminuição progressiva da velocidade de rotação terrestre.

A decisão de introduzir um segundo intercalar ao UTC é da responsabilidade do International Earth Rotation Service (IERS). De acordo com os acordos internacionais, a introdução destes segundos deverá ser efectuada, de preferência, no final dos meses de Dezembro ou Julho ou, em caso de necessidade, no final dos meses de Março e Setembro. Desde que o sistema entrou em vigor em 1972, só foram introduzidos segundos intercalares em alguns dos meses de Junho e Dezembro.

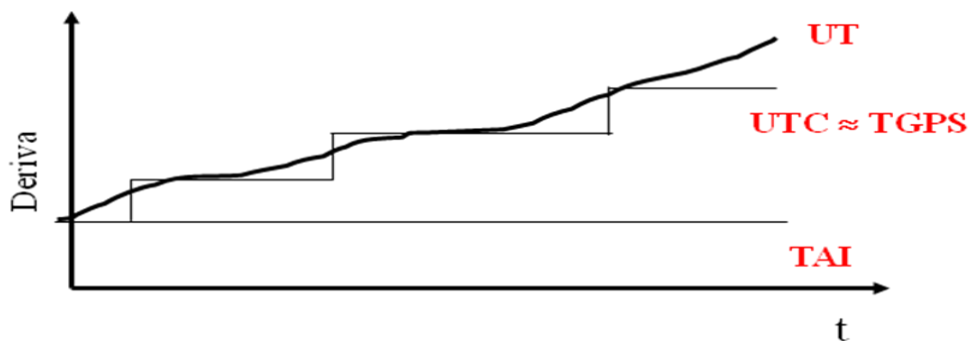


figura 3.20. Comparação entre os tempos UT, UTC e TAI



| Ano  | Jun 30 | Dec 31 | Ano  | Jun 30 | Dec 31 |
|------|--------|--------|------|--------|--------|
| 1972 | +1     | +1     | 1992 | +1     | 0      |
| 1973 | 0      | +1     | 1993 | +1     | 0      |
| 1974 | 0      | +1     | 1994 | +1     | 0      |
| 1975 | 0      | +1     | 1995 | 0      | +1     |
| 1976 | 0      | +1     | 1996 | 0      | 0      |
| 1977 | 0      | +1     | 1997 | +1     | 0      |
| 1978 | 0      | +1     | 1998 | 0      | +1     |
| 1979 | 0      | +1     | 1999 | 0      | 0      |
| 1980 | 0      | 0      | 2000 | 0      | 0      |
| 1981 | +1     | 0      | 2001 | 0      | 0      |
| 1982 | +1     | 0      | 2002 | 0      | 0      |
| 1983 | +1     | 0      | 2003 | 0      | 0      |
| 1984 | 0      | 0      | 2004 | 0      | 0      |
| 1985 | +1     | 0      | 2005 | 0      | +1     |
| 1986 | 0      | 0      | 2006 | 0      | 0      |
| 1987 | 0      | +1     | 2007 | 0      | 0      |
| 1988 | 0      | 0      | 2008 | 0      | +1     |
| 1989 | 0      | +1     | 2009 | 0      | 0      |
| 1990 | 0      | +1     | 2010 | 0      | 0      |
| 1991 | 0      | 0      | 2011 | 0      | 0      |

quadro 3.3. Datas de introdução de segundos intercalares

|            |                     |             |          |                           |
|------------|---------------------|-------------|----------|---------------------------|
| hora local | 2009-07-09-15:08:21 | Terça-feira | Dia 190  | Fuso UTC+2                |
| hora UTC   | 2009-07-09-13:08:21 | Terça-feira | Dia 190  | MJD 55021.54746           |
| hora GPS   | 2009-07-09-13:08:36 | Semana 1539 | 392916 s | Ciclo 1 semana 0515 dia 4 |
| hora TAI   | 2009-07-09-13:08:55 | Terça-feira | Dia 190  | 34 segundos intercalares  |

quadro 3.4. Sistemas de tempo para o dia 9 de Julho de 2009: TAI-UTC=+34 s, GPS-UTC=+15 s, TAI-GPS=+19 s

b) Converter o tempo civil para tempo local

Nas actividades quotidianas torna-se incómodo utilizar tanto o tempo solar médio local como o tempo universal pois cada meridiano tem associado um tempo diferente, sendo necessário conhecer a diferença de longitudes entre dois observadores de forma a sincronizar acontecimentos. Consideram-se então 24 faixas com 15° de amplitude em longitude (fusos horários) no interior das quais a hora é idêntica, independentemente da diferença de longitudes. É a partir do tempo solar médio do meridiano central do fuso que é feita a contagem do tempo no interior desse fuso. A diferença entre o tempo solar médio local do lugar de observação e o tempo solar médio do fuso horário respectivo é igual a  $TSM^{local} - TSM^{fuso} = \Delta\lambda - n^h$ , onde  $\Delta\lambda$  é a diferença de longitudes entre o lugar de observação e o meridiano central do fuso e  $n^h$  é o número de horas completas, igual ao número do fuso do observador. O tempo solar médio do fuso horário  $n$  está relacionado com o tempo universal através de  $TSM^{fuso} = UT + n^h$ .

O quadro 3.5., incluído na página <http://enggeografica.fc.ul.pt/gpsdatamain.htm>, indica as coordenadas da estação GPS permanente da FCUL, que podemos considerar coincidentes com as coordenadas do ponto estação, localizado a pouca distância.

| <b>Geodésicas</b>    | <b>LAT</b>     | <b>LON</b>     | <b>h (BPA)</b> |
|----------------------|----------------|----------------|----------------|
| ETRS89 (*)           | 38°45'23,2713" | -9°09'24,7485" | 155,540        |
| Datum LISBOA         | 38°45'17,6021" | -9°09'20,2102" |                |
| Datum 73             | 38°45'20,4138" | -9°09'27,7961" |                |
| <b>Cartográficas</b> | <b>M</b>       | <b>P</b>       | <b>H (BPA)</b> |
| HG-DLX               | -88990,31      | -100730,19     | 102,17         |
| HG-D73               | -88991,92      | -100728,42     | 102,17         |
| <b>Cartesianas</b>   | <b>X/Vx</b>    | <b>Y/Vy</b>    | <b>Z/Vz</b>    |
| ITRF2000 (2005.6)    | 4916949,017    | -792574,204    | 3971367,877    |
|                      | -0,013         | 0,025          | 0,008          |

quadro 3.5. Coordenadas da estação permanente da FCUL

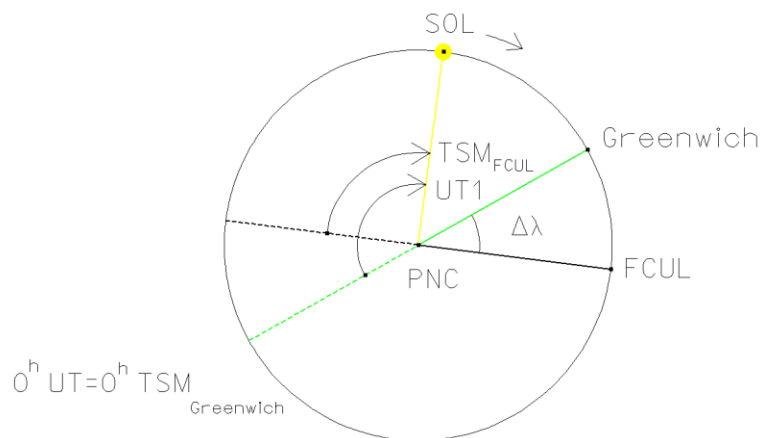


figura 3.21. Relação entre diferença de tempos solares e diferença de longitudes

Para as operações de campo é necessário um teodolito ou estação total com precisão de um segundo, de um barómetro com precisão milimétrica, de um termómetro com precisão de meio grau e de um relógio com hora com erro inferior a 30 segundos. As leituras devem ser efectuadas entre as 8 e as 10 horas da manhã ou entre as 2 e as 4 horas da tarde. A latitude do ponto estação pode ser extraída da cartografia, embora um erro maior que 10'' possa comprometer a precisão do resultado final.

O giroscópio é actualmente muito utilizado em topografia subterrânea na orientação de teodolitos (figura 3.22.). Embora não tenha a precisão dos métodos astronómicos, é suficiente para a generalidade das aplicações na determinação do norte geográfico. Existem giroscópios de dois tipos:

- 1) tipo suspenso, onde o giroscópio é aplicado sobre o eixo secundário do teodolito
- 2) tipo flutuante, onde o giroscópio está integrado no teodolito

O segundo tipo é semiautomático e não é considerado aqui.



figura 3.22. Orientação num túnel com um giroscópio montado num teodolito

O giroscópio para demonstrações laboratoriais é constituído por um disco (rotor) propulsionado por um motor eléctrico que lhe comunica uma velocidade angular constante  $\vec{\omega}_0$  (figura 3.23.). O disco está montado num braço AB (eixo y) que por sua vez pode rodar em torno de outros dois eixos (x e z). O disco é equilibrado por um peso W, de tal forma que o momento total de forças  $\vec{M}$  sobre o sistema relativamente a O é nulo e portanto  $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0$ , ou seja,  $\vec{L} = \text{constante}$  (giroscópio livre). Considerando o caso em que o braço do disco se encontra na posição horizontal, a única parte móvel do sistema é o disco, com momento de inércia I e velocidade angular  $\vec{\omega}_0$ , sendo o momento angular do giroscópio dado por  $\vec{L} = I\vec{\omega}_0 = \text{constante}$ .

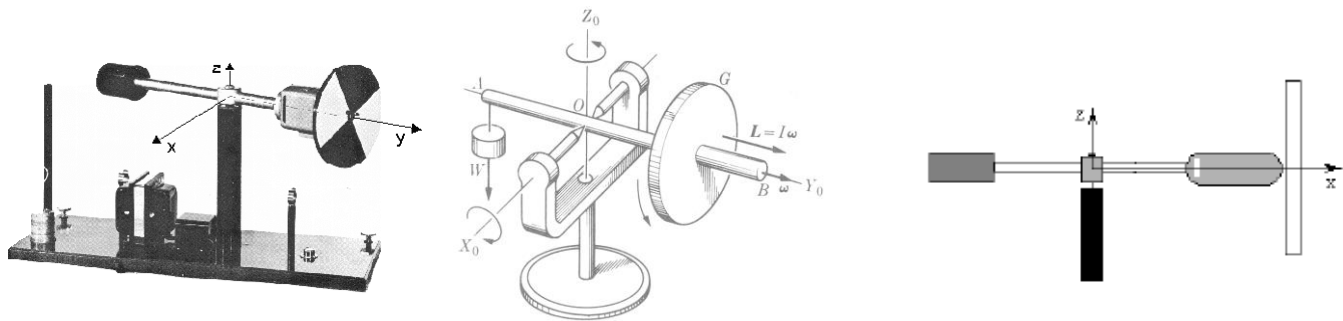


figura 3.23. Giroscópio livre (de forças): o vector momento angular do sistema é paralelo ao eixo y, fixo no espaço

No caso do giroscópio forçado (figura 3.24.), num dado instante é aplicada uma força  $\vec{F} = -Fu_z$  no braço do giroscópio a uma distância r do eixo z e a partir daí verifica-se que o braço do giroscópio começa a rodar em torno de z com velocidade angular  $\Omega$ , chamada velocidade de precessão do giroscópio, isto é,  $\vec{L}$  deixa de ser constante. De facto, a força aplicada ao braço do giroscópio faz surgir neste um momento de forças dado por  $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$ ; atendendo à 2ª lei de Newton, em consequência do surgimento deste momento de forças haverá uma variação do momento angular do giroscópio, isto é,

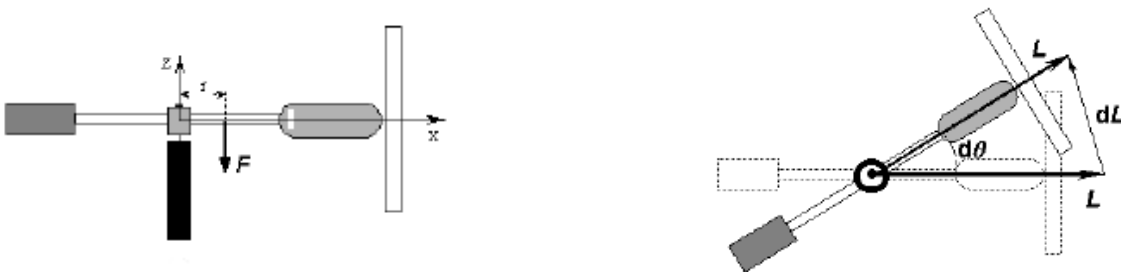
$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}.$$


figura 3.24. Giroscópio forçado

Por outro lado, o disco do giroscópio move-se com velocidade constante comunicada pelo motor eléctrico. Isto significa que o módulo do seu momento angular deve manter-se constante. Portanto, a variação de  $\vec{L}$  referida deverá acontecer só em direcção e preservar o módulo (a variação do momento angular é sempre na direcção de  $\vec{M}$ ). Admitindo que num curto intervalo de tempo dt após o aparecimento do momento de forças  $\vec{M}$ , o braço do giroscópio rodou um ângulo dθ, tem-se  $d\vec{L} = \vec{L}d\theta$ , ou seja,  $\vec{M} = I\omega_0 \frac{d\theta}{dt} = I\omega_0\Omega$ . Atendendo a que a força  $\vec{F}$  aplicada ao braço do giroscópio é perpendicular a este, o módulo do momento das forças é dado por  $M=rF$ , tirando-se que o módulo da velocidade de precessão é dado por  $\Omega = \frac{rF}{I\omega_0}$ . Quanto ao sentido da precessão do giroscópio, ele é dado pelo sentido de  $d\vec{L}$ , que conforme se pode ver de  $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$  é o mesmo que o de  $\vec{M}$ .

O princípio de operação dos giroscópios de aplicação topográfica baseia-se na rotação diurna da Terra e na propriedade de um giroscópio livre em rodar livremente em três planos mutuamente perpendiculares (figura 3.25.). Um giroscópio diz-se equilibrado se o respectivo centro de massa coincide com o ponto O de intersecção dos três eixos principais; um giroscópio equilibrado em que não existe atrito nos suportes de suspensão diz-se livre (um giroscópio livre apenas existe em teoria). Um giroscópio livre consiste num disco (rotor) em rotação (2), suspenso em dois anéis; o rotor está montado num anel interior (4) e num anel exterior com suportes nos 1, 3 e 5. Este sistema permite que o rotor rode livremente em torno dos eixos x, y e z, mantendo-se o ponto O imóvel; após o sistema ter estabilizado, o eixo x não reage à rotação da base (6), solidária com o movimento diurno terrestre, mantendo a orientação no espaço.

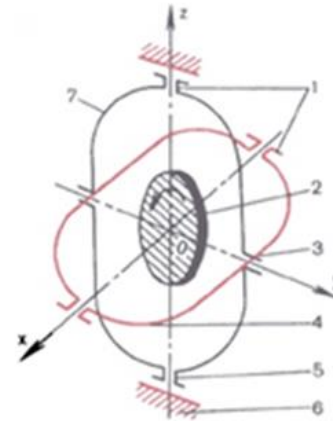
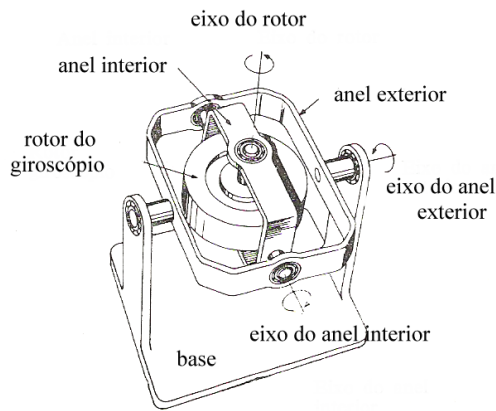
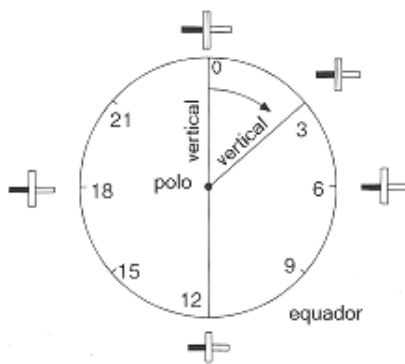
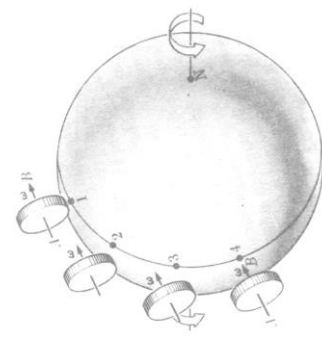


figura 3.25. Giroscópio livre

Suponha-se que um giroscópio livre (figura 3.26), às 0h, tem o eixo de rotação segundo a direcção E-W (ou seja, o plano de rotação do disco contém a direcção N-S); devido à respectiva inércia, o giroscópio mantém no espaço o plano de rotação invariável enquanto que a Terra roda, de tal forma que, relativamente a um observador terrestre, parece que o plano de rotação do giroscópio sofre uma rotação ao longo de 24h.



a)



b)

figura 3.26. Giroscópio livre

Considere-se agora um peso suspenso no eixo de rotação do giroscópio (figura 3.27.), tal forma que ele permaneça no plano horizontal. Em A suponha-se o eixo segundo a direcção E-W; em B, como já se viu, a rotação terrestre faz com que o

eixo de rotação do giroscópio mostre uma rotação aparente, deixando então o pêndulo de estar em equilíbrio, de tal forma que o efeito da força da gravidade é sentido sobretudo na extremidade superior do eixo do giroscópio, causando esta força a precessão representada em C. Em D, a precessão rodou o eixo do giroscópio até ao plano do meridiano; nesta posição os planos de rotação da Terra e do giroscópio coincidem e a precessão cessa.

Pode provar-se que o momento da força aplicada no eixo do giroscópio, de módulo  $F = L\omega \cos \varphi$  (esta força está sempre contida no plano do meridiano) é dado por  $M = L \omega \cos \varphi \sin Az$ , sendo  $\varphi$  a latitude do ponto estação,  $\omega$  a velocidade de rotação da Terra e  $Az$  o azimute do eixo do toro, tendendo este momento a levar o eixo do giroscópio para o plano do meridiano; quando isso acontecer,  $Az=0$  e  $M=0$ . Para determinar exactamente (com um erro de  $\pm 20''$ ) a posição do Norte geográfico, é necessário efectuar uma pré-orientação do giroscópio, de forma a colocar o respectivo eixo a menos de  $30^\circ$  com o plano do meridiano local (utilizando uma bússola, uma carta ou por aproximações sucessivas). Para melhorar a pré-orientação, fazendo com que o desvio em relação ao meridiano não exceda  $3'$ , o procedimento baseia-se no período de oscilação do eixo do giroscópio, que é constante para uma área extensa (1000 km); esse período pode ser calculado a partir do conhecimento aproximado da latitude do local e assim, com o auxílio de um cronómetro pode conseguir-se uma aproximação muito razoável do plano do meridiano.

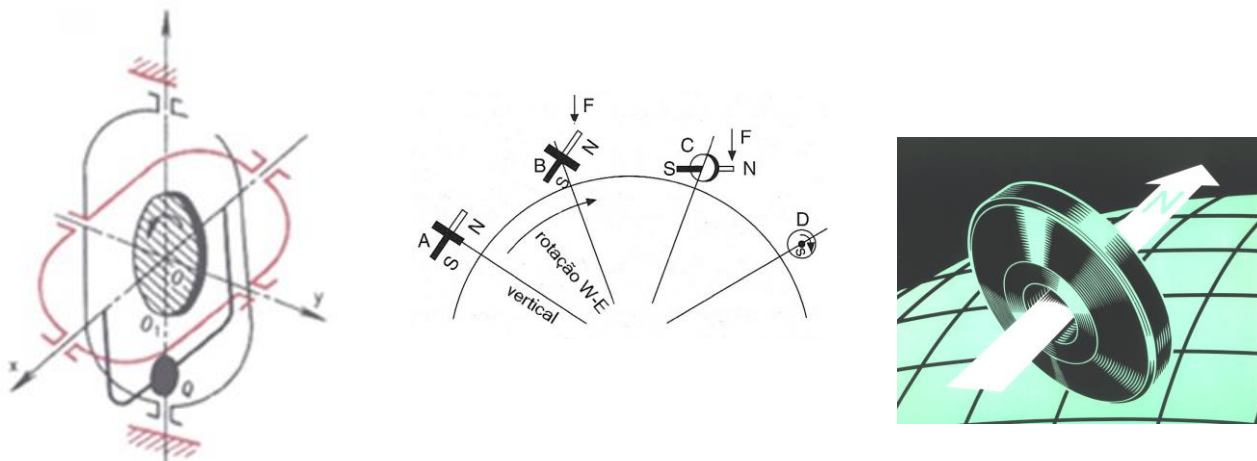


figura 3.27. Giroscópio forçado

O giroscópio Wild GAK1 pode ser adaptado aos teodolitos Wild T1, T16 e T2, devendo estes aparelhos ser modificados de fábrica de forma a adaptar os montantes e o anel onde se fixa o giroscópio; este anel tem três ranhuras de centragem, ficando o giroscópio sempre na mesma posição em relação à linha de visada do teodolito (figura 3.28.). Quando o aparelho é nivelado, o disco do giroscópio, suspenso numa fita metálica, comporta-se como um fio de prumo, sujeito à força da gravidade, de forma a que o respectivo eixo fica horizontal. Considerando a figura 3.29. que corresponde ao corte esquemático do giroscópio Wild GAK1, tem-se que este aparelho é constituído por um corpo pesado em forma de toro (figura 3.29. - 24), móvel em torno de um eixo (figura 3.29. - 7), encaixado num suporte circular duplo através de suspensões do tipo *cardan*. Este suporte está suspenso por uma delgada fita de aço figura 3.29.-15), a qual se posiciona segundo a vertical do lugar em virtude da gravidade. Desta forma, o eixo de rotação do toro é mantido sempre horizontal pela atracção terrestre. Imprimindo ao toro um movimento de rotação muito rápido em torno do seu eixo (acima de 22000 rotações por minuto), esse

toro procurará, em consequência da sua inércia, conservar o plano inicial de rotação que tomou no espaço. Contudo o toro, porque está ligado ao globo terrestre por intermédio do teodolito e do tripé, acompanha a rotação da Terra e não pode conservar o seu plano de rotação inicial. O toro sujeito à gravidade, reage a esta perturbação devida ao movimento de rotação da terra fazendo com que o seu eixo (figura 3.29.-7) rode em torno da vertical do lugar (movimento de precessão) até se estabilizar no plano do meridiano (direcção do Norte geográfico no hemisfério Norte). Nesta posição, o toro acompanha a Terra no seu movimento de rotação de Oeste para Este deixando o seu movimento de ser perturbado. Mas, em virtude da inércia correspondente à sua massa, o toro não se coloca imediatamente na direcção do norte, oscilando para um e outro lado do meridiano, com uma amplitude que decresce devagar com o tempo. Medindo determinadas quantidades como as elongações máximas destas oscilações ou a sua duração, é possível encontrar uma forma simples a direcção do norte, que corresponde à posição média dessas oscilações. No giroscópio Wild GAK/1, o plano de rotação é munido de um índice (figura 3.30.) que lhe é solidário e que é projectado sem paralaxe sobre uma escala fixa, onde o movimento de precessão é observado. Esta técnica, que demora cerca de meia hora até estar concluída, tem uma exactidão de cerca de 20 segundos de arco.

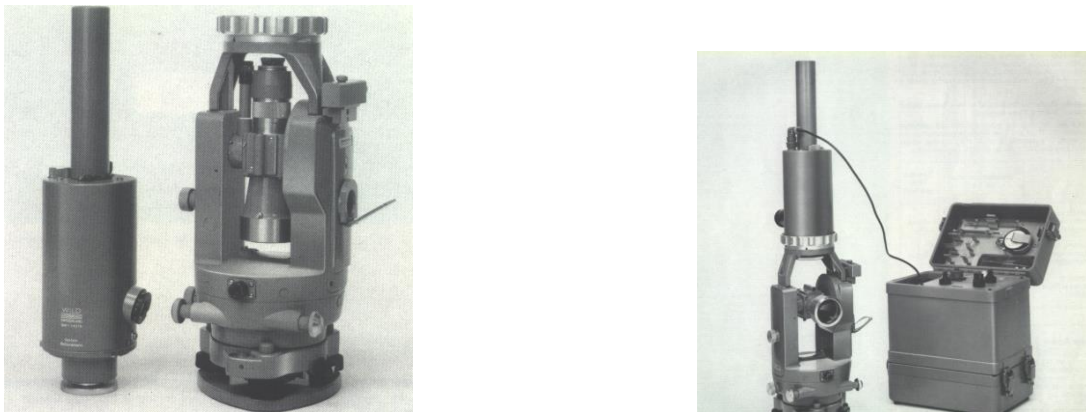
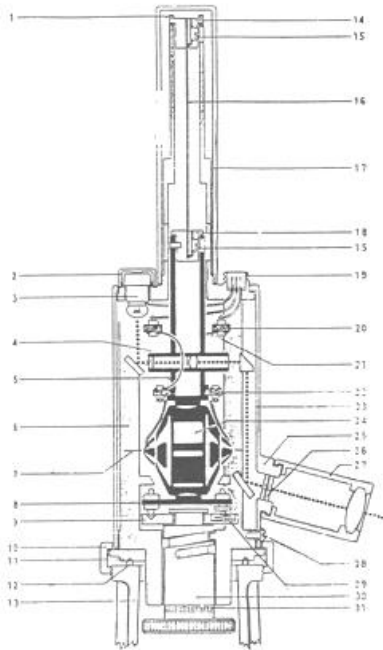


figura 3.28. Giroscópio GAK1: o aparelho é estacionado e orientado aproximadamente na direcção norte utilizando uma bússola; quando é atingida a velocidade angular adequada, liberta-se movimento do giroscópio



|    |                                         |    |                                       |
|----|-----------------------------------------|----|---------------------------------------|
| 1  | Parafuso de fixação do fio de suspensão | 17 | Tubo cilíndrico de protecção          |
| 2  | Capuz do orifício da lâmpada            | 18 | Pinça inferior do tubo                |
| 3  | Suporte e lâmpada                       | 19 | Ficha                                 |
| 4  | Projector óptico                        | 20 | Placa isolada                         |
| 5  | Mastro                                  | 21 | Fio eléctrico                         |
| 6  | Coluna                                  | 22 | Placa isolada                         |
| 7  | Eixo de rotação                         | 23 | Caixa exterior                        |
| 8  | Plano de travagem                       | 24 | Massa giroscópica                     |
| 9  | Placa de bloqueamento                   | 25 | Janela de observação                  |
| 10 | Anel de segurança                       | 26 | Vidro com escala                      |
| 11 | Sulco em V invertido                    | 27 | Lupa                                  |
| 12 | Rolamento esférico                      | 28 | Parafuso de fixação da caixa exterior |
| 13 | Suporte                                 | 29 | Haste de contacto                     |
| 14 | Pinça superior do fio                   | 30 | Sistema de bloqueio                   |
| 15 | Parafuso de bloqueamento                | 31 | Anel avisador                         |
| 16 | Fio de suspensão                        |    |                                       |

figura 3.29. Giroscópio GAK1: o aparelho é estacionado e orientado aproximadamente na direcção norte utilizando uma bússola; quando é atingida a velocidade angular adequada, liberta-se movimento do giroscópio

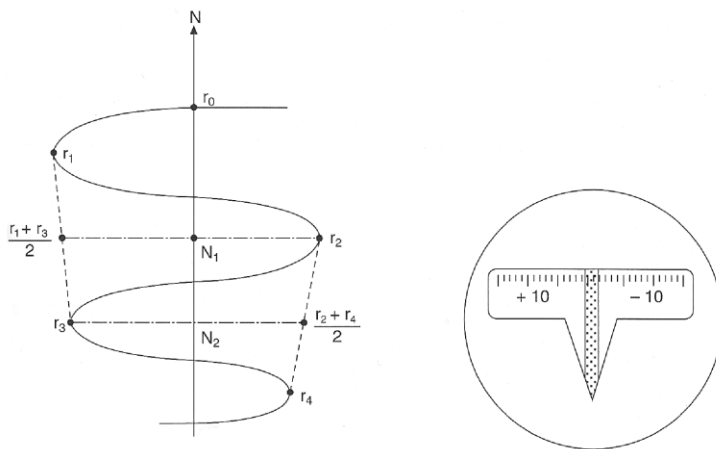


figura 3.30. Determinação das elongações: a orientação do giroscópio em relação ao teodolito é tal que o eixo de rotação do giroscópio e a linha de pontaria da luneta se encontram no mesmo plano quando a referência luminosa do giroscópio se encontra sobre a posição zero da escala

No giroteodolito Wild GAK1 existe uma escala solidária com a alidade do teodolito e é rodando a alidade que se consegue manter a imagem do índice centrada com a origem da escala; neste método, o operador, após ter colocada a alidade do teodolito na direcção do Norte obtida na pré-orientação, tem que seguir a oscilação da imagem do índice e imobilizar a alidade nos pontos de máxima elongação do eixo do giroscópio, efectuando as respectivas leituras  $r_1, r_2, r_3, r_4, \dots$ , no limbo azimutal (à aproximação do momento de máxima elongação, a velocidade de deslocamento da referência luminosa diminui e esta parece imóvel durante um curto intervalo de tempo). Como a oscilação é amortecida, efectua-se a seguinte média, no caso de serem efectuadas 4 leituras:



$$N = \sum_{i=1}^2 \frac{N_i}{2}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} N_1 = \frac{1}{2} \frac{r_1 + r_3}{2} + r_2 \\ N_2 = \frac{1}{2} \frac{r_2 + r_4}{2} + r_3 \end{cases}$$

Esta média representa a graduação do limbo azimutal correspondente à direcção do Norte geográfico: sendo E o ponto estação (onde estão centrados o eixo do teodolito e a fita de suspensão do giroscópio), se for  $\ell_R$  a leitura do teodolito correspondente à referência R, o azimute da direcção ER será  $Az_R = \ell_R - N$ .

No método das passagens, o operador age de modo inverso em relação ao método anterior: deixa a alidade do teodolito fixa e limita-se a anotar os instantes das passagens da referência luminosa pela origem da escala utilizando um cronómetro.

As fitas de aço são ainda utilizadas para medir distâncias no interior das minas. A menos que o pavimento seja plano, as fitas de aço são suspensas pelas duas extremidades (as correcções a serem aplicadas devido a erros cometidos na medição de distâncias são as mesmas que à superfície: erro de aferição, erro de elasticidade, erro de dilatação, erro de catenária). Os instrumentos electrónicos de medida tornaram-se muito usados embora em certas minas onde se possam gerar atmosferas perigosas, o seu uso deve obedecer aos regulamentos.

As poligonais podem dividir-se em poligonais de 1ª ordem, que servem para determinar o apoio básico, materializado nas zonas permanentes da mina, em poligonais de 2ª ordem, que se desenvolvem nas zonas em exploração e em poligonais de 3ª ordem, utilizadas para a representação detalhada de algumas zonas consideradas importantes. O estabelecimento destas redes de apoio é efectuado em ordem inversa da utilizada à superfície: em primeiro lugar é estabelecida a rede de ordem mais baixa (3ª), que é posteriormente substituída por uma rede de ordem mais elevada quando a área em exploração permitir visadas mais longas e for possível efectuar percursos fechados. Tipicamente são adoptados os seguintes erros máximos na posição relativa entre pontos de controlo (esta precisão relativa pode ser interpretada como a razão entre o semi-eixo maior da elipse de erro relativo, a um nível de 95%, e a distância entre os pontos considerados):

1ª ordem: 1/10.000 a 1/20.000, conforme a dimensão da mina

2ª ordem: 1/5.000

3ª ordem: 1/1.000

Na compensação de uma poligonal pelo método clássico, os erros de fecho são distribuídos proporcionalmente pelas observações. Considere-se a poligonal seguinte com n pontos (figura 3.32.), observada em modo goniométrico (ou seja, os rumos são transmitidos por observação de ângulos), cujo ponto inicial é o ponto 1, onde foi feita uma orientação para o ponto 0, sendo efectuadas leituras de distância para a frente e de direcção azimutal para a frente e para trás; nos pontos intermédios 2 a n-1, são efectuadas as mesmas observações entre pontos da poligonal; no último ponto da poligonal (n), apenas se observam as direcções azimutais para a frente e para trás; há portanto n ângulos observados, n-1 distâncias observadas, n+2 rumos calculados:

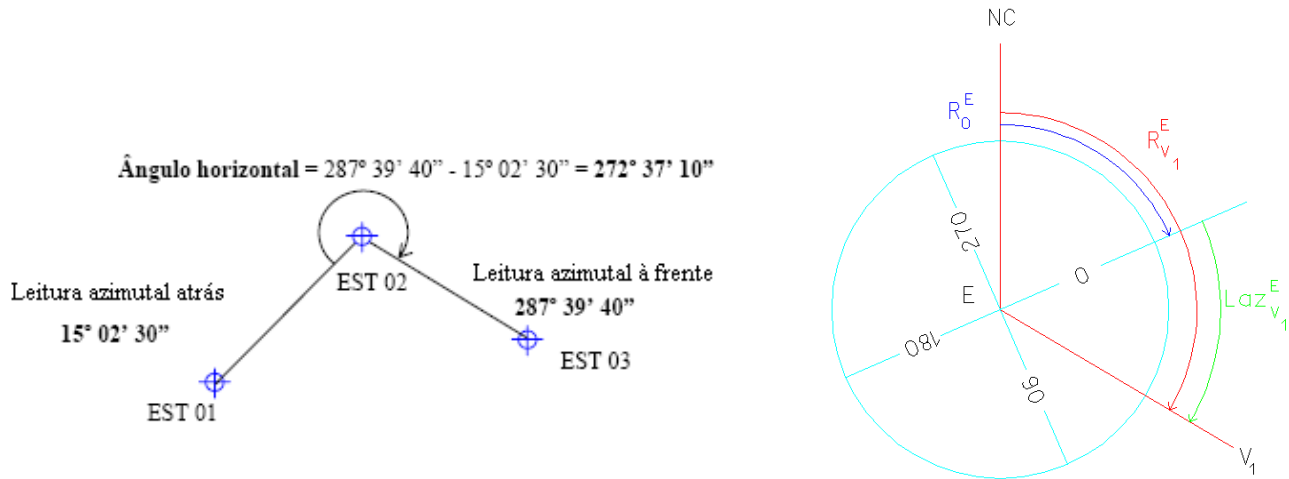


figura 3.31. Ângulo entre duas direcções azimutais e rumo do zero da graduação azimutal: sendo o ponto estação E de coordenadas conhecidas e o ponto visado  $V_1$  igualmente de coordenadas conhecidas, tem-se

$$R_0^E = R_E^{V_1} - Laz_E^{V_1} = a \tan \frac{M_{V_1} - M_E}{P_{V_1} - P_E} - Laz_E^{V_1}$$

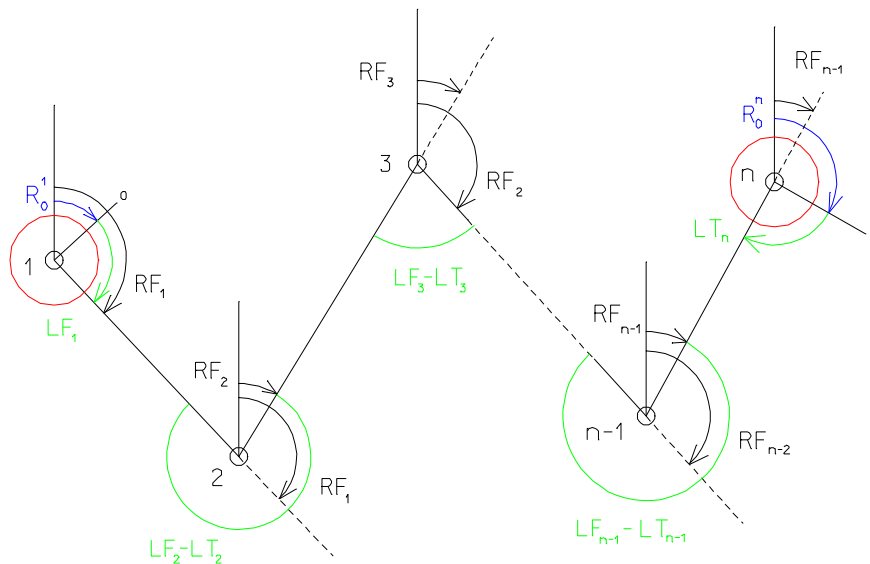


figura 3.32. Esquema de poligonal com n estações observada em modo goniométrico

Da figura 3.32. tem-se que os rumos para a frente em cada estação são:

estação 1 :  $R_F^1 = R_0^1 + Laz_F^1$

estação k :  $R_F^k = R_F^{k-1} + \pi + Laz_F^k - Laz_T^k, k = 2, \dots, n-1$

Quanto ao transporte de coordenadas, tem-se:

$$\begin{cases} M_i = M_1 + \sum_{j=1}^{i-1} d_j \sin RF_j \\ P_i = P_1 + \sum_{j=1}^{i-1} d_j \cos RF_j \end{cases} \quad i = 2, \dots, n$$

onde  $d_j$  representa a distância reduzida ao plano cartográfico.

Define-se erro de fecho angular  $\varepsilon_\alpha$  como a diferença entre o rumo transportado do 1º ao nº ponto ao longo da poligonal e o rumo calculado no ponto de chegada, através das coordenadas dos pontos n e n+1:

$$\varepsilon_\alpha = R_{n,T} - R_{n,C} = R_0 + \sum_{j=1}^n \alpha_j - n\pi - a \tan \frac{M_{n+1} - M_n}{P_{n+1} - P_n}$$

Define-se erro de fecho planimétrico ou linear  $\varepsilon = \sqrt{\varepsilon_M^2 + \varepsilon_P^2}$  como a diferença entre as coordenadas transportadas do 1º ao nº ponto ao longo da poligonal e as coordenadas do ponto de chegada (n), em que:

$$\varepsilon_M = M_{n,T} - M_{n,C} = M_1 + \sum_{j=1}^{n-1} d_j \sin R_j - M_{n,C}$$

$$\varepsilon_P = P_{n,T} - P_{n,C} = P_1 + \sum_{j=1}^{n-1} d_j \cos R_j - P_{n,C}$$

O erro de fecho angular é distribuído em igual proporção pelas observações angulares pois os ângulos são sempre de igual precisão para o mesmo aparelho; assim, os ângulos compensados são:

$$\bar{\alpha}_j = \alpha_j + \frac{\varepsilon_\alpha}{n}$$

e portanto, os rumos compensados são:

$$\bar{R}_j = R_0 + \sum_{j=1}^i \bar{\alpha}_j - i\pi.$$

isto é, há acumulação dos erros cometidos no cálculo dos ângulos entre visadas à custa das direcções azimutais observadas.

O erro de fecho planimétrico é distribuído na proporção inversa do comprimento das visadas (admite-se que quanto maior for a distância entre os pontos, menor é a respectiva precisão):

$$\begin{cases} \bar{M}_j = M_j + \frac{\sum_{j=1}^n d_j}{L} \varepsilon_M \\ \bar{P}_j = P_j + \frac{\sum_{j=1}^n d_j}{L} \varepsilon_P \end{cases}$$

com

$$L = \sum_{j=1}^{n-1} d_j \quad (\text{desenvolvimento da poligonal}).$$

Neste procedimento não se alteraram as distâncias observadas; pode efectuar-se o cálculo de distâncias compensadas, da forma:

$$\bar{d}_j = \sqrt{(\bar{M}_{j+1} - \bar{M}_j)^2 + (\bar{P}_{j+1} - \bar{P}_j)^2}$$

e repetir novamente o esquema mencionado, até os valores dos erros de fecho não sofrerem alteração.

Nas poligonais observadas no modo declinado (portanto com uma declinatória (bússola) ou um giroscópio), os rumos (respectivamente magnéticos e geográficos) em cada estação são observados (e não obtidos à custa do valor de  $R_0$  e dos ângulos entre visadas até aí observados): são portanto independentes uns dos outros. As expressões de cálculo e de compensação são as mesmas do caso goniométrico com excepção da compensação do rumo; aqui tem-se:

$$\bar{R}_j = R_j + \frac{i}{n} \varepsilon_a$$

As operações topográficas subterrâneas baseiam-se numa rede de pontos cujas coordenadas devem ser calculadas no referencial utilizada à superfície, de tal forma que seja possível relacionar os levantamentos efectuados à superfície e os levantamentos subterrâneos. Uma grande parte das poligonais estabelecidas nas minas são abertas, isto é, têm início em pontos de coordenadas conhecidas mas as coordenadas do ponto final não são conhecidas, pelo que não é possível proceder a um ajustamento das observações. Nestas circunstâncias é particularmente importante efectuar a propagação dos erros desde o ponto inicial até ao ponto final. Conforme as poligonais sejam observadas em modo goniométrico ou em modo declinado (rumos observados por declinatórias ou giroscópios), assim o resultado será diferente.

Dado um conjunto de funções  $Y_m$  (coordenadas de um ponto) dependentes das variáveis  $X_n$  (observações de ângulos e distâncias), tem-se que a matriz de variâncias-covariâncias de  $Y_m$  é dada por:

$$\Sigma_{YY} = J_{YX} \Sigma_{XX} J_{YX}^T$$

com

$$\Sigma_{YY} = \begin{bmatrix} \sigma_{Y_1}^2 & \sigma_{Y_1 Y_2} & \dots & \sigma_{Y_1 Y_m} \\ \dots & \sigma_{Y_2}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{Y_m}^2 \end{bmatrix}, \Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma_{X_1}^2 & \sigma_{X_1 X_2} & \dots & \sigma_{X_1 X_m} \\ \dots & \sigma_{X_2}^2 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \sigma_{X_m}^2 \end{bmatrix}, J_{YX} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Y_1}{\partial X_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial Y_m}{\partial X_1} & \dots & \frac{\partial Y_m}{\partial X_n} \end{bmatrix}.$$

Concretizando para os pontos  $(M_1, P_1)$  e  $(M_2, P_2)$ , onde  $Y_1=M_2$ ,  $Y_2=P_2$ ,  $X_1=R_1$  (ou  $\alpha_1$ ),  $X_2=d_1$  e

$$\begin{cases} M_2 = M_1 + d_1 \sin R_1 \\ P_2 = P_1 + d_1 \cos R_1 \end{cases}$$

tem-se:

$$J_{yx} = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial Y_2}{\partial X_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_2}{\partial R_1} & \frac{\partial M_2}{\partial d_1} \\ \frac{\partial P_2}{\partial R_1} & \frac{\partial P_2}{\partial d_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \cos R_1 & \sin R_1 \\ -d_1 \sin R_1 & \cos R_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (P_2 - P_1) & \frac{M_2 - M_1}{d_1} \\ -(M_2 - M_1) & \frac{P_2 - P_1}{d_1} \end{bmatrix}$$

$$\Sigma_{P_1 P_2} = \begin{bmatrix} d_1 \cos R_1 & \sin R_1 \\ -d_1 \sin R_1 & \cos R_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{\alpha_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{d_1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 \cos R_1 & -\sin R_1 \\ -d_1 \cos R_1 & \cos R_1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (P_2 - P_1)^2 \sigma_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{M_2 - M_1}{d_1}\right)^2 \sigma_{d_1}^2 & -(M_2 - M_1) \sigma_{\alpha_1}^2 + \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d_1^2} \sigma_{d_1}^2 \\ -(M_2 - M_1) \sigma_{\alpha_1}^2 + \frac{(M_2 - M_1)(P_2 - P_1)}{d_1^2} \sigma_{d_1}^2 & (M_2 - M_1)^2 \sigma_{\alpha_1}^2 + \left(\frac{P_2 - P_1}{d_1}\right)^2 \sigma_{d_1}^2 \end{bmatrix}$$

Generalizando para o ponto k, k=2,...,n da poligonal, obtêm-se as seguintes expressões para a propagação das variâncias-covariâncias, no caso goniométrico:

$$\begin{cases} \sigma_{M_k}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (P_k - P_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(M_{i+1} - M_i)^2}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \\ \sigma_{P_k}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (M_k - M_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(P_{i+1} - P_i)^2}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \\ \sigma_{M_k P_k} = -\sum_{i=1}^{k-1} (M_k - M_i)(P_k - P_i) \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(M_{i+1} - M_i)(P_{i+1} - P_i)}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \end{cases}$$

No caso declinado, as expressões correspondentes são:

$$\begin{cases} \sigma_{M_k}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (P_{i+1} - P_i)^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{M_{i+1} - M_i}{d_i}\right)^2 \sigma_{d_i}^2 \\ \sigma_{P_k}^2 = \sum_{i=1}^{k-1} (M_{i+1} - M_i)^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{P_{i+1} - P_i}{d_i}\right)^2 \sigma_{d_i}^2 \\ \sigma_{M_k P_k} = -\sum_{i=1}^{k-1} (M_{i+1} - M_i)(P_{i+1} - P_i) \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(M_{i+1} - M_i)(P_{i+1} - P_i)}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 \end{cases}$$

A elipse de erro obtém-se da equação  $|\Sigma_{YX} - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - (\sigma_M^2 + \sigma_P^2)\lambda + (\sigma_M^2\sigma_P^2 - \sigma_{MP}^2) = 0$ , ou seja, das duas soluções

$\lambda_1$  e  $\lambda_2$  tem-se que os semieixos maior e menor e o ângulo do semieixo maior com o eixo P são:

$$a = \sqrt{\lambda_1}, \quad b = \sqrt{\lambda_2}, \quad \Psi = \frac{1}{2} a \tan \frac{2\sigma_{MP}}{\sigma_P^2 - \sigma_M^2}.$$

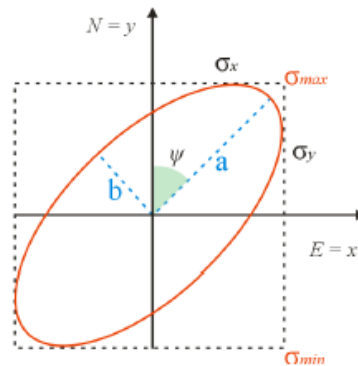
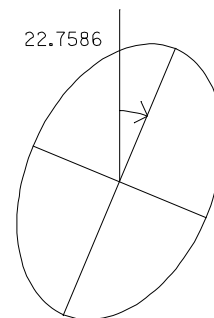


figura 3.33. Elementos da elipse de erro

Exemplo: calcule os elementos da elipse de erro supondo que a matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas planimétricas (X,Y) de um ponto de uma poligonal é

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2_X & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma^2_Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.005963 & 0.002403 \\ 0.002403 & 0.010683 \end{bmatrix}_{m^2}$$

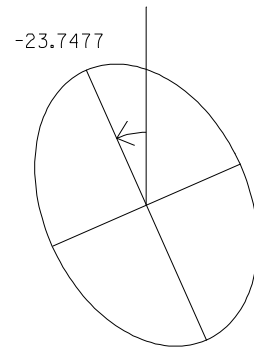
$$a=0.108 \text{ m}, \quad b=0.070 \text{ m}, \quad \theta=22^\circ.7586$$



Exemplo: calcule os elementos da elipse de erro supondo que a matriz de variâncias-covariâncias das coordenadas planimétricas de um ponto de uma poligonal é

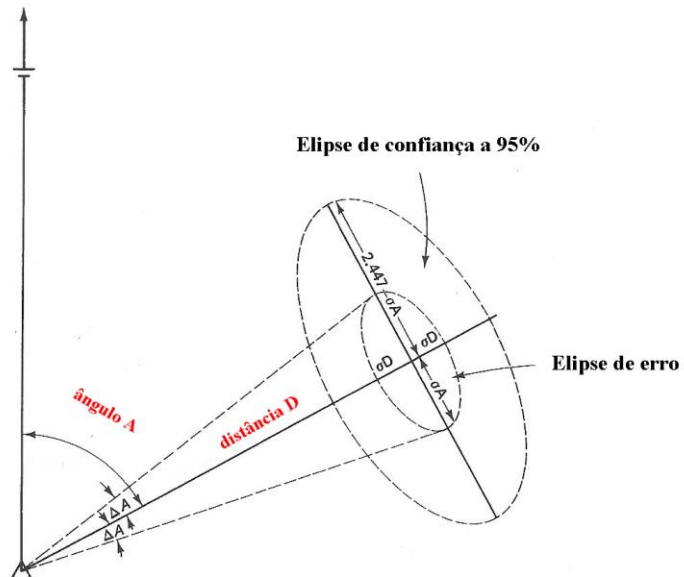
$$\Sigma = \begin{bmatrix} 0.376330 & -0.129788 \\ -0.129788 & 0.614226 \end{bmatrix} m^2$$

$a=0.819$  m,  $b=0.565$  m,  $\theta=-23^\circ.7477$



Uma elipse de confiança é uma elipse concêntrica com a elipse de erro e que tem parâmetros  $k_a$ ,  $k_b$  e  $\theta$ , sendo  $k$  um factor de escala. Sendo  $\sigma_X$  e  $\sigma_Y$  os desvios padrão das variáveis independentes  $X$  e  $Y$ , a probabilidade de um ponto estar contido na elipse de confiança ao nível  $k$  (probabilidade de um acontecimento conjunto correspondente a um intervalo de  $k\sigma$  em cada direcção) é dada por  $P=1-e^{-k^2/2}$ ; inversamente, os semieixos maior e menor  $k_a$  e  $k_b$  da elipse de confiança associada ao nível de probabilidade  $P$  podem ser calculados de  $a$  e  $b$  por  $k = (-2\ln(1-P))^{1/2}$ :

|               |                |                |                |                |                |                |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| intervalo     | 1.000 $\sigma$ | 1.177 $\sigma$ | 2.146 $\sigma$ | 2.447 $\sigma$ | 2.760 $\sigma$ | 3.035 $\sigma$ |
| probabilidade | 0.394          | 0.500          | 0.900          | 0.950          | 0.975          | 0.990          |



Exemplo: considere uma poligonal aberta que parte do ponto  $P_1$  de coordenadas  $X_1=5000.000$ ,  $Y_1=10000.000$  e com orientação para o ponto  $P_0$  de coordenadas  $X_0=5328.774$ ,  $Y_0=10072.045$ , com as observações seguintes, em que a precisão das

observações angulares e lineares é igual a, respectivamente,  $\pm 5''$  em modo goniométrico e  $\pm 20''$  em modo declinado e  $\pm(5 \text{ mm}+5 \text{ ppm})$ ; calcule as coordenadas e as elipses de erro para os pontos  $P_2, P_3, P_4, P_5$  e  $P_6$  a da poligonal, supondo as coordenadas dos pontos  $P_0$  e  $P_1$  isentas de erro.

|            |               |       |           |
|------------|---------------|-------|-----------|
| $\alpha_1$ | 132° 41' 46'' | $d_1$ | 190.400 m |
| $\alpha_2$ | 041° 28' 36'' | $d_2$ | 183.465 m |
| $\alpha_3$ | 236° 19' 10'' | $d_3$ | 136.280 m |
| $\alpha_4$ | 146° 29' 58'' | $d_4$ | 217.712 m |
| $\alpha_5$ | 097° 23' 48'' | $d_5$ | 160.372 m |

$$R_{P_1P_0} = a \tan \frac{X_{P_0} - X_{P_1}}{Y_{P_0} - Y_{P_1}} = a \tan \frac{5328.774 - 5000.000}{10072.045 - 10000.000} = a \tan \frac{328.774}{72.045} = 77^\circ 38' 24.0''$$

$$R_{P_1P_2} = R_{P_1P_0} + \alpha_1 = 210^\circ 20' 10.4''$$

$$R_{P_2P_3} = R_{P_1P_2} - 180^\circ + \alpha_2 = 71^\circ 48' 46.8''$$

$$R_{P_3P_4} = R_{P_2P_3} - 180^\circ + \alpha_3 = 128^\circ 07' 57.2''$$

$$R_{P_4P_5} = R_{P_3P_4} - 180^\circ + \alpha_4 = 94^\circ 37' 55.6''$$

$$R_{P_5P_6} = R_{P_4P_5} - 180^\circ + \alpha_5 = 12^\circ 01' 44.0''$$

$$\begin{cases} X_2 = X_1 + d_1 \sin R_{P_1P_2} = 5000.00 + 190.400 \sin 210^\circ 20' 10.4'' = 4903.834 \text{ m} \\ Y_2 = Y_1 + d_1 \cos R_{P_1P_2} = 10000.00 + 190.400 \cos 210^\circ 20' 10.4'' = 9835.670 \text{ m} \end{cases}$$

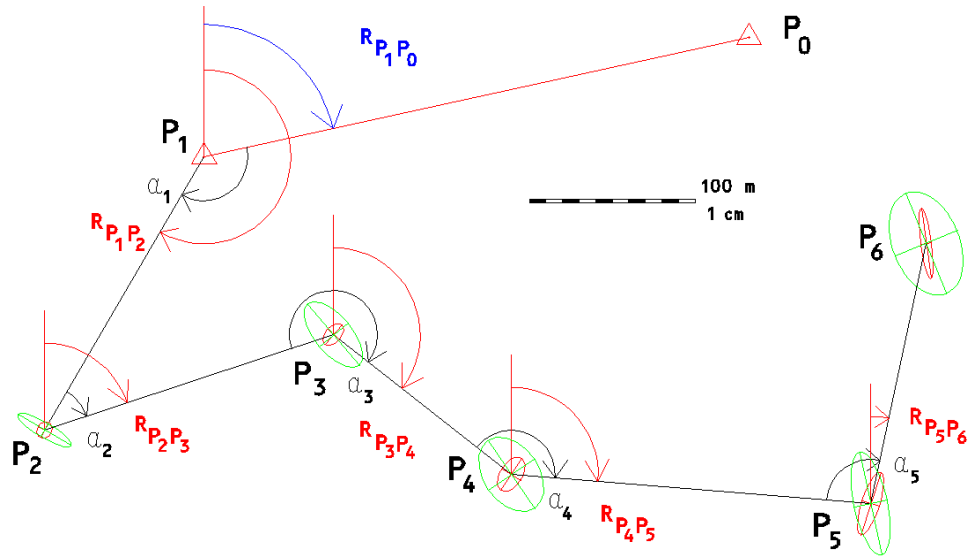
$$\begin{cases} X_3 = X_2 + d_2 \sin R_{P_2P_3} = 4903.834 + 183.465 \sin 71^\circ 48' 46.8'' = 5078.134 \text{ m} \\ Y_3 = Y_2 + d_2 \cos R_{P_2P_3} = 9835.670 + 183.465 \cos 71^\circ 48' 46.8'' = 9892.933 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_4 = X_3 + d_3 \sin R_{P_3P_4} = 5078.134 + 136.208 \sin 128^\circ 07' 57.2'' = 5185.329 \text{ m} \\ Y_4 = Y_3 + d_3 \cos R_{P_3P_4} = 9892.933 + 136.208 \cos 128^\circ 07' 57.2'' = 9808.783 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_5 = X_4 + d_4 \sin R_{P_4P_5} = 5185.329 + 217.712 \sin 94^\circ 37' 55.2'' = 5402.330 \text{ m} \\ Y_5 = Y_4 + d_4 \cos R_{P_4P_5} = 9808.783 + 217.712 \cos 94^\circ 37' 55.2'' = 9791.201 \text{ m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X_6 = X_5 + d_5 \sin R_{P_5P_6} = 5402.330 + 160.372 \sin 12^\circ 01' 44.0'' = 5435.753 \text{ m} \\ Y_6 = Y_5 + d_5 \cos R_{P_5P_6} = 9791.201 + 160.372 \cos 12^\circ 01' 44.0'' = 9948.051 \text{ m} \end{cases}$$





(a verde estão indicadas as elipses de erro em modo declinado e a encarnado as elipses de erro em modo goniométrico)

| modo goniométrico |          |        |        |         | modo declinado |          |        |        |         |
|-------------------|----------|--------|--------|---------|----------------|----------|--------|--------|---------|
| 4903.834          | 9835.670 | 5.190  | 4.615  | 30.336  | 4903.834       | 9835.670 | 18.462 | 5.190  | 120.336 |
| 5078.134          | 9892.933 | 7.800  | 4.803  | 41.702  | 5078.134       | 9892.933 | 24.120 | 11.373 | 140.055 |
| 5185.329          | 9808.783 | 11.435 | 7.000  | 33.205  | 5185.329       | 9808.783 | 24.845 | 17.170 | 145.410 |
| 5402.330          | 9791.201 | 19.780 | 8.933  | 17.365  | 5402.330       | 9791.201 | 31.322 | 20.097 | 168.038 |
| 5435.753          | 9948.051 | 21.337 | 10.291 | 172.222 | 5435.753       | 9948.051 | 32.520 | 24.410 | 157.908 |

x, y, a, b,  $\theta$

Com o processo de transporte da orientação pretende-se atribuir coordenadas a pelo menos um ponto no interior da mina e determinar o rumo de uma direcção, podendo utilizar-se diversos métodos para esse efeito:

- 1) Um poço vertical com 2 cabos suspensos (fios de prumo)
- 2) Dois poços verticais com um cabo suspenso cada (e com acesso entre os dois poços pelo interior da mina)
- 3) Um poço vertical com um cabo suspenso e utilizando um giroscópio.
- 4) Prumos ópticos ou laser
- 5) Teodolitos

Nos dois primeiros casos, os cabos suspensos servem simultaneamente para a transferência das coordenadas (planimétricas) e do rumo directamente da superfície para o interior da mina, supondo-se que cada cabo define rigorosamente a vertical, obtendo-se assim um plano, cujo rumo se determina à superfície e que é em seguida transportado para o interior da mina. Esta condição é particularmente importante no primeiro caso, onde a distância entre os dois cabos é pequena, usualmente entre 2 a 4 metros. Aqui, as deflexões aleatórias (o movimento do ar no poço exerce uma deflexão na carga suspensa, afastando-a da vertical)  $e_1$  e  $e_2$ , uma para cada cabo, separados pela distância  $a$ , produzem um erro  $\varepsilon''$  no transporte do rumo dado por

$$\varepsilon_R'' = \frac{206265''}{a} \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$$

Por exemplo, se  $e_1 = e_2 = 1 \text{ mm}$  e  $a=3 \text{ m}$ ,  $\varepsilon_R'' = 97''$ . Por esta razão, os métodos que se baseiam na utilização de um poço requerem grande cuidado e experiência na definição das verticais. Quando se utilizam dois cabos, um em cada poço, o erro causado por possíveis deflexões é muito inferior do que no caso anterior pois aqui a distância é geralmente da ordem das centenas de metros, podendo ser tolerados erros de maior magnitude na verticalidade dos prumos; o resultado é portanto mais preciso e muitas vezes melhor do que com a utilização de giroscópios. A utilização de giroscópios revolucionou a orientação no interior das minas; neste método, o prumo é utilizado para a transferência das coordenadas (planimétricas) de um único ponto e pode tolerar-se um erro mesmo da ordem de alguns centímetros pois o transporte da orientação é efectuado de forma independente do prumo. Seja qual for o método utilizado, não há especificações genéricas quanto a requisitos de precisão para o transporte da orientação, sendo naturalmente elevados quando dois túneis devem encontrar-se.

Os fios-de-prumo servem como estações intermédias da poligonal que se estabelece entre os pontos da superfície, de coordenadas conhecidas, e os pontos do interior da mina; como não é possível estacionar nesses pontos, os ângulos entre visadas não podem ser medidos directamente. Uma forma de efectuar a orientação de uma poligonal subterrânea é através rolos de cabo metálico com uma carga suspensa (outras formas incluem a utilização de prumos ópticos ou prumos laser). Para este efeito devem ser utilizados cabos com uma grande resistência à tracção (no mínimo  $200 \text{ kg/mm}^2$ ); por regra estes cabos devem ser tão finos quanto possível e a carga tão pesada quanto possível. Um compromisso é seleccionar o peso da carga como sendo igual a  $H/3$ , onde  $H$  é a profundidade que se pretende alcançar na mina. Por razões de segurança, o peso suspenso no cabo não deve ultrapassar metade do peso máximo que esse cabo aguenta.

Por exemplo, sendo a profundidade  $H=600 \text{ m}$  e se forem utilizados cabos com resistência igual a  $200 \text{ kg/mm}^2$ , o peso da carga deve ser igual a  $200 \text{ kg}$  e a área da secção transversal do cabo deve ser igual a  $2 \text{ mm}^2$ , a que corresponde um diâmetro igual a  $1.6 \text{ mm}$ .

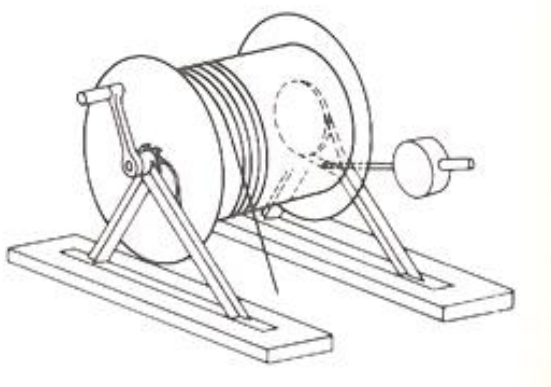
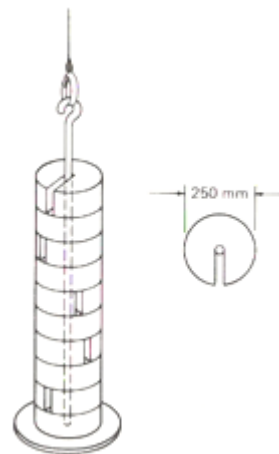


figura 3.34.a) Tambor do cabo

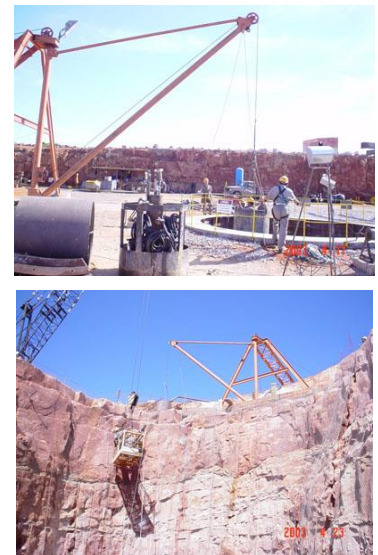
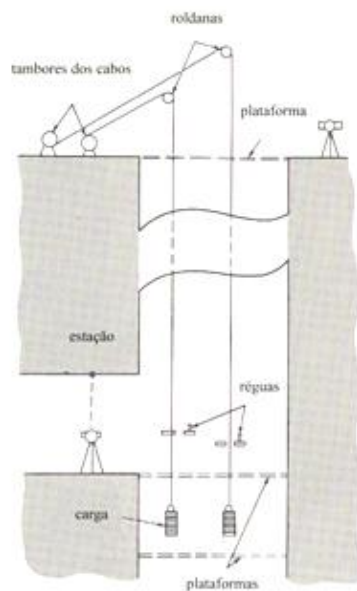


b) Carga suspensa no cabo

O cabo deve ser enrolado em tambores que permitam uma descida lenta da carga até ao nível desejado (figura 3.34.a), encontrando-se estes tambores localizados no topo do poço da mina, bem fixos ao solo. Para a descida do cabo é suficiente um peso de 5 kg, acrescentando-se a restante carga quando a extremidade inferior do cabo alcança o fundo da mina. A carga consiste numa haste onde se podem acrescentar discos, usualmente com 20 kg cada (figura 3.34.b).

Sobre o poço é construída uma plataforma onde, através de uma abertura, o cabo passa por uma roldana e penetra no poço; durante o processo de descida suspende-se um peso de pequenas dimensões, que é substituído pela carga final quando a extremidade do cabo alcança o nível pretendido, onde se constrói outra plataforma. À distância  $\Delta H = (PH)/(aE)$ , onde P representa o peso da carga em kg, a a secção transversal do cabo, H a profundidade e  $E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ , é construída uma outra plataforma de segurança (figura 3.35.).

figura 3.35. Plataformas instaladas ao longo do poço vertical



Deve garantir-se que o cabo não toca em quaisquer obstáculos ao longo do poço; para esse efeito, deixa-se cair uma argola metálica ao longo do cabo desde o topo até ao nível final. Outro teste é a comparação do período de oscilação teórico do cabo,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{100 \times g}}$$

com o valor observado ( $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ). Em poços de profundidade reduzida, quando a carga é pequena, esta deve estar contida num recipiente com óleo, de forma a reduzir as oscilações do cabo, produzida por correntes de ar ou por água que cai do poço. Em poços profundos é impossível atenuar este efeito e o cabo mantém-se numa oscilação contínua, descrevendo elipses com alguns centímetros de diâmetro. Assim, a posição da vertical pode determinar-se através das leituras máximas para cada um dos lados (em geral um conjunto de 10 leituras), efectuadas em régua colocadas junto ao nível final. Estas leituras devem efectuar-se de forma a que o cabo oscile num plano paralelo à régua, que por sua vez deve ser ortogonal à direcção visada pelo aparelho (estação total). A posição média calculada serve como referência para as observações angulares que estabelecem a ligação entre a superfície e o interior da mina.

O movimento do ar no poço exerce uma força (deflexão) na carga suspensa (figura 3.36.) que pode ser estimada pela expressão

$$e = \frac{30hHdv^2}{P} \text{ mm}$$

onde  $h$  é a porção do cabo exposta à corrente de ar (m), normalmente considerada como aproximadamente igual à altura da galeria,  $H$  é a profundidade (m),  $d$  é o diâmetro do cabo (m),  $v$  é a velocidade do ar (m/s) e  $P$  o peso da carga (kg).

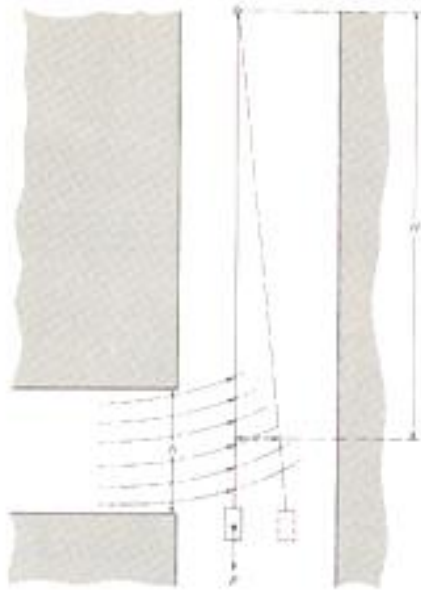


figura 3.36. Efeito da corrente de ar na carga suspensa

A direcção da deflexão coincide em geral com a direcção do eixo da galeria, embora possa diferir até  $\pm 45^\circ$ , podendo por isso causar erros de grande magnitude na orientação. Este efeito deve por isso ser evitado, tentando manter as aberturas aos diversos níveis encerradas para diminuir as correntes de ar. Quando este efeito for demasiado grande pode utilizar-se duas cargas de pesos diferentes (figura 3.37): na régua determinam-se as posições  $r_1$  e  $r_2$  correspondentes aos dois pesos (em geral tal que  $P_1:P_2=1:2$ ) e a posição  $r_0$  na régua, correspondente à vertical, pode extrapolar-se através da expressão:

$$r_0 = r_2 - \frac{P_1(r_1 - r_2)}{P_2 - P_1}.$$

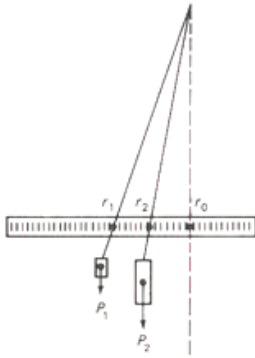


figura 3.37. Determinação da deflexão utilizando cargas com pesos diferentes

Este método tem como desvantagem alterar as condições de oscilação do cabo quando se procede à mudança de carga. Por outro lado, a carga de menor peso pode não ser suficientemente pesada para contrariar a forma em espiral do cabo: durante a respectiva construção, e posteriormente, quando é enrolado no tambor, o cabo é deformado e assume uma forma em espiral, de tal forma que mesmo uma carga pesada pode não ser suficiente para o esticar completamente, descrevendo uma espiral de pequeno diâmetro (figura 38.).



figura 3.38. Forma espiralada do cabo

O raio r, em centímetros, pode calcular-se utilizando a expressão

$$r = \frac{\pi d^4 E}{64 R P}$$

onde R é o raio da espiral do cabo sem carga (cm), d é o diâmetro do cabo (cm), P é o peso da carga (kg) e  $E=2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ . O erro máximo devido a este efeito na posição da vertical é 2r, no caso de o observador à superfície visar o ponto A do cabo enquanto o observador no nível final utilizar o ponto B.

Em numerosos trabalhos de implantação de projectos, de construção ou monitorização de edifícios, pontes ou túneis, coloca-se o problema de projectar pontos ao longo da vertical, para baixo ou para cima do ponto estação, como seja o rebatimento no solo de pontos de mudança de água num telhado ou o transporte de uma direcção para um nível diferente, o estacionamento do teodolito sobre ou sob um ponto do solo ou do topo de um edifício. Existem diversos modelos de prumos ópticos zenitais (como por exemplo o Wild ZL, figura 3.39a.) ou nadirais (por exemplo o Wild NL) utilizando níveis tubulares, sistemas de nivelamento com compensação automática ou uma superfície de mercúrio com referência para fazer coincidir a linha de visada com a vertical, cuja precisão varia de 1'' (1/200000) para o caso do Wild GLQ, passando por 2'' (1/100000) até aos 4'' (1/50000). No caso do Wild GLQ (figura 3.39b.), a linha de visada é verticalizada através da coincidência dos fios do retículo com a respectiva imagem reflectida numa superfície de mercúrio.



figura 3.39a. Luneta zenital Wild ZL

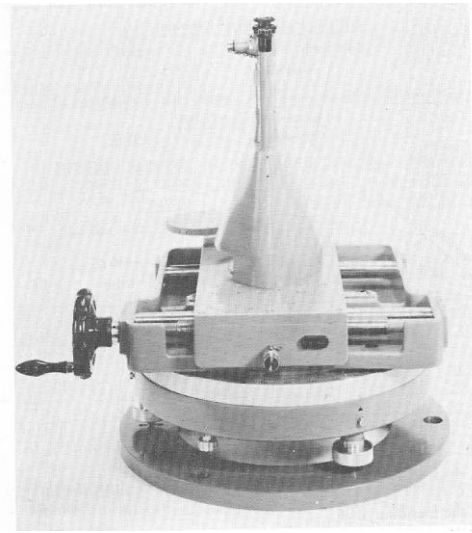
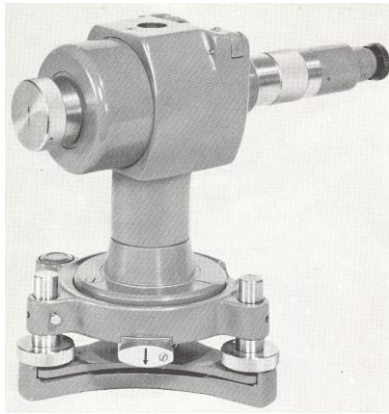


figura 3.39b. Prumo óptico Wild GLQ

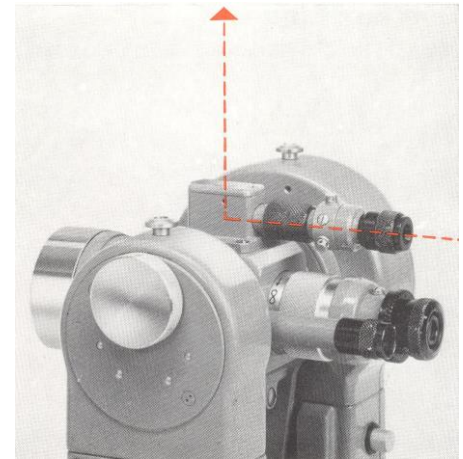
A figura 3.40. mostra outros acessórios para visadas zenitais ou nadirais. A luneta zenital Wild ZNL é colocada numa base e pode ser utilizada como prumo óptico de precisão para a determinação da vertical na construção de edifícios de vários andares, chaminés de fábricas, viadutos, pontes barragens, assim como na perfuração de poços para a instalação de elevadores. Pode ainda ser utilizado na centragem do teodolito em observações numa torre ou para o rebatimento no solo do ponto estação.



Luneta zenital Wild ZNL



Prumo óptico zenital/nadiral Wild ZBL



Visor zenital solidário com a luneta

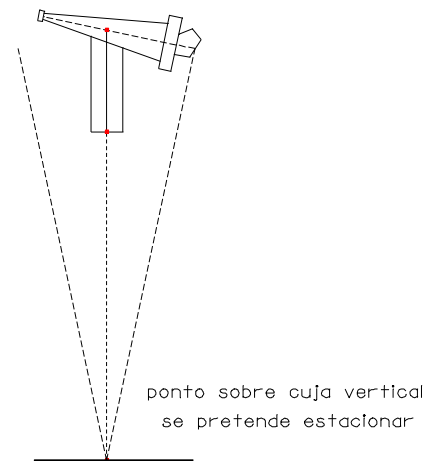
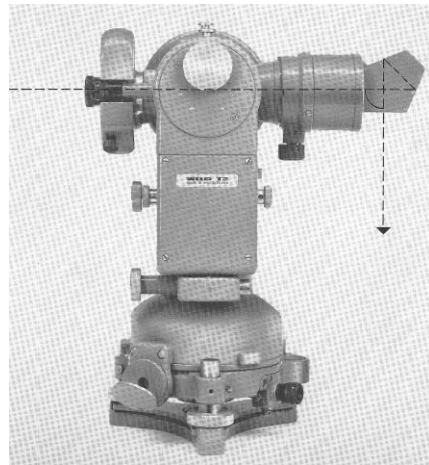
figura 3.40.

O prumo óptico zenital/nadiral Wild ZBL é colocado numa base e é utilizado para a definição de visadas verticais de curto alcance, para cima ou para baixo, na construção civil ou na indústria. O visor zenital solidário com a luneta é um acessório que serve para centrar o teodolito num ponto estação materializado acima do solo, na vertical do instrumento, como por exemplo, em trabalhos de implantação ou de medição em minas, túneis ou galerias, em pipe-lines ou em edifícios industriais.

O prisma pentagonal ou prisma objectivo é um acessório para teodolitos, transformando-os em lunetas excêntricas, (os teodolitos, na sua generalidade, são concêntricos, isto é, têm o eixo de colimação passando pelo centro do instrumento) possibilitando desta forma a projecção a grandes distâncias de pontos na vertical da estação e, sobretudo, a transferência de direcções para níveis diferentes (figura 3.41.). O prisma é adaptado à objectiva do teodolito através de um anel que é fixado com recurso a um parafuso, colocando-se um contra-peso na extremidade da objectiva. Esta montagem permite uma rotação do prisma, podendo o eixo de colimação descrever um plano perpendicular ao eixo óptico da luneta.

Como em geral o prisma objectivo é utilizado para visadas verticais a grandes distâncias, pode não ser fácil identificar a projecção do ponto estação no solo ou no tecto: é assim aconselhável determinar aproximadamente este ponto (a menos de 2 cm) com auxílio de outros meios (fio de prumo, visor zenital da luneta, prumo óptico nadiral/zenital) e não directamente com o prisma objectivo.

figura 3.41. Prisma objectivo e contrapeso montados num teodolito Wild T2: um prisma pentagonal faz com que o eixo de visada seja perpendicular ao eixo óptico da luneta



No estacionamento do teodolito, este é colocado em estação sobre ou sob o ponto aproximado, calando-se a nivela esférica. Visa-se então com rigor o ponto pretendido utilizando o parafuso de pequenos movimentos da luneta e rodando o prisma manualmente, de forma a que o cruzamento dos fios do retículo contenha o ponto estação a grande distância no solo; rodando a alidade 180°, o desvio constatado é eliminado, metade através da rotação manual do prisma e do basculamento da luneta (com o parafuso de pequenos movimentos zenitais), metade através do deslocamento paralelo do instrumento ao longo da mesa do tripé. Repetindo esta operação, o cruzamento dos fios do retículo deve permanecer sobre o ponto visado quando o prisma roda. Uma inclinação do eixo de rotação reflecte-se em todo a sua grandeza na verticalidade da visada; por exemplo, uma descentragem de ¼ de intervalo da nivela tórica numa rotação de 180° produz um erro de verticalidade de 1/55000 para o T1 e T16 (correspondente a 1.8 mm a 100 m) e de 1/85000 para o T2 (1.2 mm a 100 m).

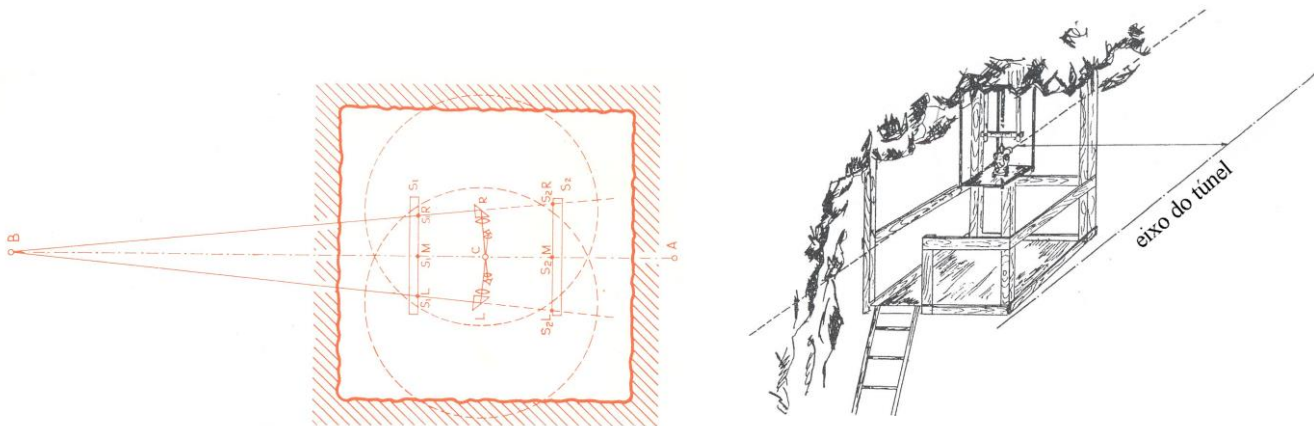


figura 3.42. Transferência de uma direcção num poço vertical

A transferência de uma direcção num poço vertical (neste caso, para baixo), definida pelos pontos A e B (eixo do túnel, por exemplo) realiza-se de seguinte forma: o teodolito, com ou sem tripé, é estacionado num suporte independente da



plataforma onde o observador se encontra, num ponto C sobre o poço e alinhado com AB, devendo a visibilidade para baixo nos 4 quadrantes ser assegurada (figura 3.42.). No nível para o qual a direcção deve ser transferida são colocadas duas miras graduadas, de forma a serem visíveis no campo de visão da luneta e a poderem ser intersectadas pelo fio do retículo quando o prisma for rodado. Estas miras devem ser colocadas perpendicularmente à direcção AB e o mais afastadas possível uma da outra. Após verticalizar o eixo principal do teodolito calando a nivela tórica, a luneta com o prisma colocado na objectiva é colocada horizontal com auxílio do círculo vertical. O ponto B é visado com o retículo girando a alidade e basculando o prisma, efectuando-se a leitura zenital correspondente. O prisma é então rodado cuidadosamente para baixo e as miras são sucessivamente visadas, obtendo-se as leituras  $S_1L$  e  $S_2L$  com o fio vertical do retículo. A alidade é rodada cerca de  $180^\circ$  e o prisma basculado até que o ponto B surja novamente no campo de visão da luneta. Com o parafuso de pequenos movimentos da alidade e o parafuso de basculamento do prisma, o ponto B é novamente visado, basculando-se o prisma para baixo até efectuar as leituras  $S_1R$  e  $S_2R$  nas miras. Os pontos médios  $S_1M = (S_1L + S_1R)/2$  e  $S_2M = (S_2L + S_2R)/2$  definem então a direcção AB no nível considerado. Repetindo o procedimento com uma inclinação da luneta um pouco diferente, obtêm-se novos valores para  $S_1M$  e  $S_2M$  (é fundamental o controlo ao longo do processo da inclinação da luneta por observação do limbo vertical).

As oculares em cotovelo, permitindo visadas até ao zénite, são utilizadas sobretudo em observações astronómicas, tendo igualmente utilização em engenharia civil e em minas. Estas oculares substituem a ocular da luneta e do microscópio de leitura. Para visadas a grande distância é conveniente controlar previamente o erro de índice vertical, assim como a inclinação do eixo secundário e a colimação horizontal, corrigindo-os se necessário.

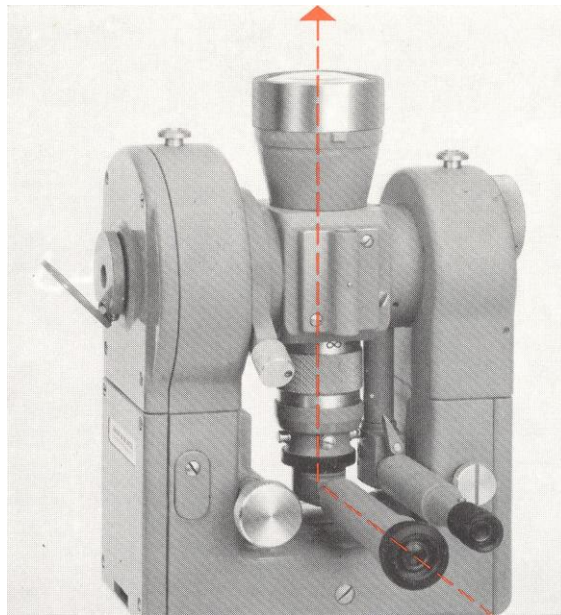


figura 3.43. Ocular em cotovelo

| Acessório                       | ZNL     | ZBL     | Visor zenital | Prisma objectivo | Ocular em cotovelo |
|---------------------------------|---------|---------|---------------|------------------|--------------------|
| Ampliação                       | 10X     | 5X      | 2.5X          | 30X              | 28X                |
| Visada mínima (m)               | 0.60    | 0.25    | 0.25          | 2.2              | 2.2                |
| Sensibilidade da nivela         | 20"     | 60"     | 20"           | 20"              | 20"                |
| Precisão de uma visada vertical | 1/30000 | 1/10000 | 1/5000        | 1/70000          | 1/70000            |
| Amplitude de utilização (m)     | 2-100   | 0.25-20 | 0.25-10       | 20-200           | 20-200             |
| Peso (kg)                       | 2.6     | 1.5     | 0.1           | 0.3              | 0.2                |

quadro 3.6. Características técnicas dos acessórios WILD para visadas verticais

A utilização dos prumos ópticos está limitada a distâncias até 200 metros devido às condições de visibilidade num poço. O alcance obtido é um pouco maior com a utilização de um feixe laser como linha de prumo, podendo a respectiva precisão ser da ordem de 0.5". Como se verifica na figura 3.44., o dispositivo utiliza um sistema interferométrico para garantir a coincidência entre o feixe emitido e o feixe reflectido numa superfície de mercúrio.

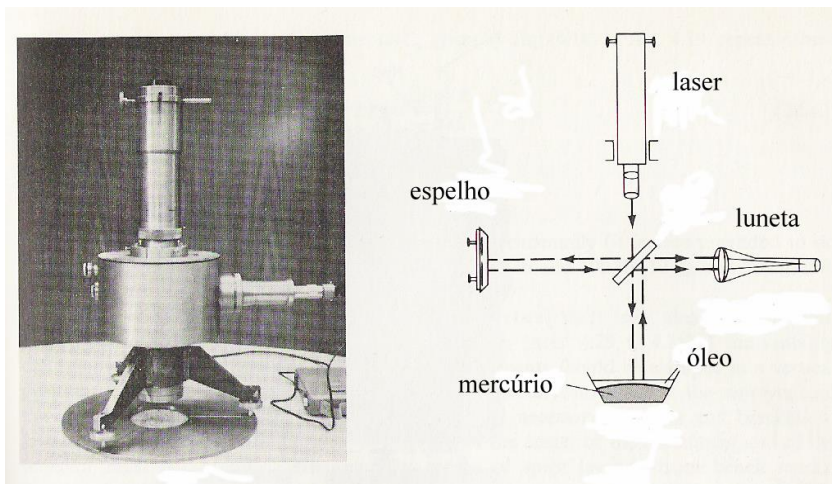


figura 3.44. Prumo laser e respectiva secção

No caso de o acesso à mina ser efectuado através de um único poço vertical, a ligação entre a poligonal efectuada à superfície e a respectiva continuação subterrânea pode ser realizada segundo os métodos de Weisbach e de Hause. Em qualquer destes métodos é necessário suspender dois cabos desde a plataforma no topo do poço até ao nível pretendido. No primeiro caso (figura 3.45.), estaciona-se no ponto B, à superfície, e orienta-se o aparelho para o ponto A, determinando-se o rumo  $R_{BA}$ ; nesse ponto, são ainda observados os ângulos  $\delta_1$  entre a direcção BA e a direcção  $BP_1$  e  $\alpha_1$  entre a direcção  $BP_1$  e a direcção  $BP_2$ , onde  $P_1$  e  $P_2$  representam as extremidades superiores de cada um dos cabos; são igualmente medidas as distâncias  $b_1$  entre B e  $P_2$ ,  $c_1$  entre B e  $P_1$  e  $a$  entre  $P_1$  e  $P_2$  (para efeitos práticos, observa-se uma poligonal  $BP_1P_2CD$  sem estacionar nos pontos  $P_1$  e  $P_2$ ).

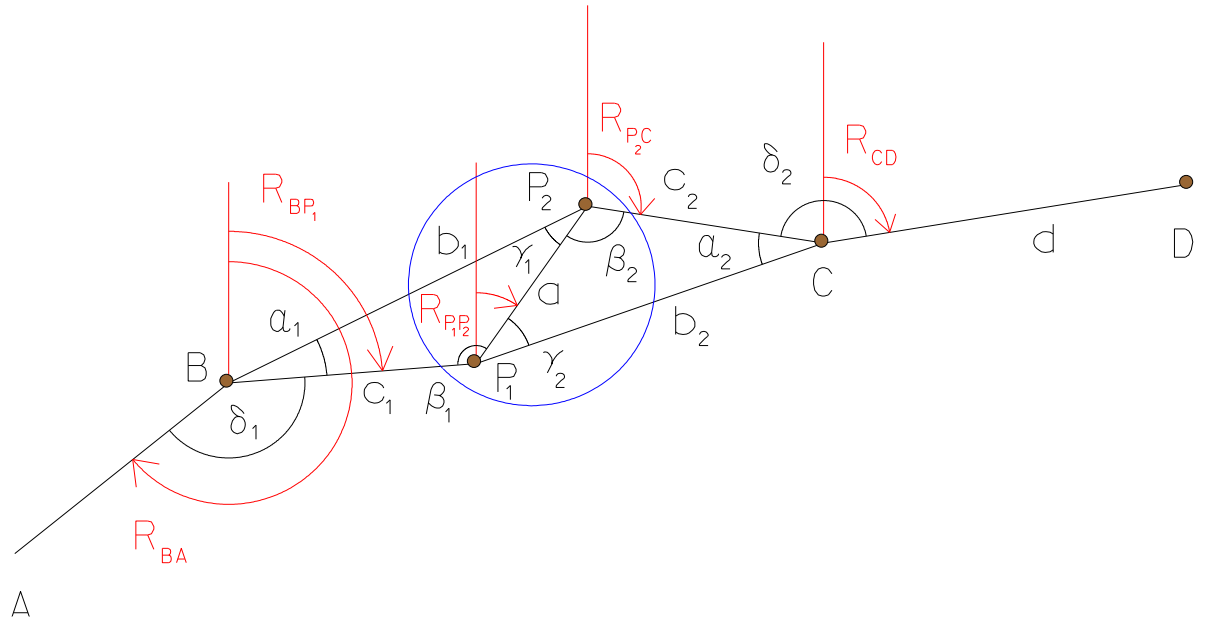


figura 3.45. Método de Weisbach

Estes valores permitem utilizar a analogia dos senos no triângulo à superfície para determinar os restantes elementos e ajustar o triângulo:

$$\frac{\sin \alpha_1}{a} = \frac{\sin \beta_1}{b_1} = \frac{\sin \gamma_1}{c_1}$$

isto é,

$$\sin \beta_1 = \frac{b_1}{a} \sin \alpha_1 \quad \text{e} \quad \sin \gamma_1 = \frac{c_1}{a} \sin \alpha_1;$$

O erro de fecho do triângulo considerado é  $\varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi$ ,

tendo-se então

$$\bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}, \quad \bar{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}, \quad \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}.$$

A distância a entre os cabos é igualmente medida nos correspondentes pontos P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub> no fundo da mina; aí, estacionando no ponto C, medem-se os ângulos α<sub>2</sub> entre as direcções CP<sub>1</sub> e CP<sub>2</sub> e δ<sub>2</sub> entre as direcções CD e CP<sub>1</sub> e CP<sub>2</sub>; são igualmente medidas as distâncias a entre P<sub>1</sub> e P<sub>2</sub>, b<sub>2</sub> entre P<sub>1</sub> e C, c<sub>2</sub> entre P<sub>2</sub> e C e d entre C e D. Note-se que no triângulo subterrâneo as pontarias não são efectuadas à base dos cabos (que oscila) mas sim à respectiva posição média, previamente determinada. Também neste caso é possível efectuar o cálculo dos restantes elementos do triângulo e proceder ao respectivo ajustamento, isto é,

$$\frac{\sin \alpha_2}{a} = \frac{\sin \beta_2}{b_2} = \frac{\sin \gamma_2}{c_2}$$

donde,

$$\sin \beta_2 = \frac{b_2}{a} \sin \alpha_2 \quad \text{e} \quad \sin \gamma_2 = \frac{c_2}{a} \sin \alpha_2.$$

O erro de fecho do triângulo considerado é  $\varepsilon_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi$ ,

tendo neste caso

$$\bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}, \bar{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}, \bar{\gamma}_2 = \gamma_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}.$$

Resumindo, tem-se:

$$1) R_{BA} = a \tan \frac{M_A - M_B}{P_A - P_B}$$

$$2) \sin \beta_1 = \frac{b_1}{a} \sin \alpha_1 \quad \text{e} \quad \sin \gamma_1 = \frac{c_1}{a} \sin \alpha_1$$

$$3) \varepsilon_1 = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 - \pi$$

$$4) \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}, \bar{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}, \bar{\gamma}_1 = \gamma_1 + \frac{\varepsilon_1}{3}$$

$$5) R_{BP_1} = R_{BA} - \delta_1$$

$$6) R_{P_1P_2} = R_{BP_1} - \pi + \bar{\beta}_1$$

$$7) \sin \beta_2 = \frac{b_2}{a} \sin \alpha_2 \quad \text{e} \quad \sin \gamma_2 = \frac{c_2}{a} \sin \alpha_2$$

$$8) \varepsilon_2 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 - \pi$$

$$9) \bar{\alpha}_2 = \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}, \bar{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}, \bar{\gamma}_2 = \gamma_2 + \frac{\varepsilon_2}{3}$$

$$10) R_{P_2C} = R_{P_1P_2} + \pi - \bar{\beta}_2$$

$$11) R_{CD} = R_{P_2C} - \pi - \delta_2$$

$$13) M_{P_1} = M_B + c_1 \sin R_{BP_1}, \quad P_{P_1} = P_B + c_1 \cos R_{BP_1}$$

$$14) M_{P_2} = M_{P_1} + a \sin R_{P_1P_2}, \quad P_{P_2} = P_{P_1} + a \cos R_{P_1P_2}$$

$$15) M_C = M_{P_2} + c_2 \sin R_{P_2C}, \quad P_C = P_{P_2} + c_2 \cos R_{P_2C}$$

$$16) M_D = M_C + d \sin R_{CD}, \quad P_D = P_C + d \cos R_{CD}.$$

A variância do rumo da direcção CD relativamente à direcção AB pode calcular-se a partir da expressão:

$$\sigma_{R_{CD}}^2 = \sigma_{\delta_1}^2 + \sigma_{\beta_1}^2 + \sigma_{\delta_2}^2 + \sigma_{\beta_2}^2 + \varepsilon_R^2$$

pois  $R_{BP_1} = R_{BA} - \delta_1$ ,  $R_{P_1P_2} = R_{BP_1} - \pi + \bar{\beta}_1$ ,  $R_{P_2C} = R_{P_1P_2} + \pi - \bar{\beta}_2$ ,  $R_{CD} = R_{P_2C} - \pi - \delta_2$ .

A variância dos ângulos  $\beta$  calculados pode ser determinada aplicando a lei de propagação dos erros às equações

$\sin \beta_1 = \frac{b_1}{a} \sin \alpha_1$  e  $\sin \beta_2 = \frac{b_2}{a} \sin \alpha_2$ , obtendo-se:

$$\sigma_{\beta}^2 = \frac{\tan^2 \beta}{b^2} \sigma_b^2 + \frac{\tan^2 \beta}{a^2} \sigma_a^2 + \left( \frac{b^2}{a^2 \cos^2 \beta} - \tan^2 \beta \right) \sigma_{\alpha}^2.$$

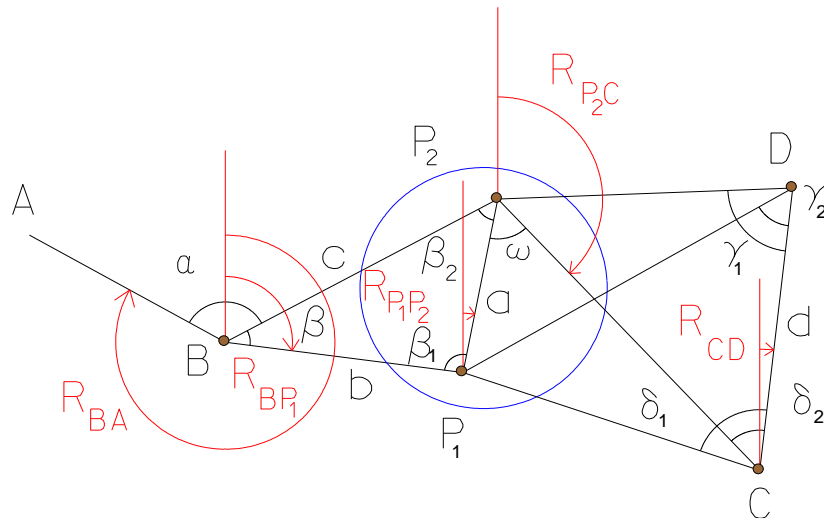
Esta última equação permite concluir que a melhor precisão para o método de Weisbach é obtida quando  $\beta \approx \pi$  porque nestas condições os erros nas distâncias podem ser desprezados e

$$\sigma_{\beta} \approx \frac{b}{a} \sigma_{\alpha} \text{ (de forma semelhante, } \sigma_{\gamma} = \frac{c}{a} \sigma_{\alpha} \text{)}.$$

Para resultados óptimos, o estacionamento em B e em C deve situar-se o mais próximo possível de um dos prumos e quase alinhado com ambos os prumos, a distância entre os prumos deve ser a maior possível e os ângulos  $\alpha$  devem ser medidos com o máximo rigor (que não devem ultrapassar os 10”).

No método de Hause (figura 3.46.), a configuração à superfície mantém-se, enquanto que no fundo da mina se observa um quadrilátero. À superfície estaciona-se no ponto B e são observados os ângulos  $\alpha$  e  $\beta$  que, juntamente com as distâncias a, b e c permitem o cálculo e a compensação do triângulo à superfície. Na mina estaciona-se sucessivamente nos pontos C e D e são observados os ângulos  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  assim como as distâncias a e d. Os erros nas distâncias não têm influência no transporte da orientação, pelo que estas não têm que ser medidas com grande precisão.

Como a distância CD é normalmente pequena, a precisão na centragem do teodolito e do alvo é crucial, pelo que se recomenda a utilização de pilares com centragem forçada (como alternativa podem utilizar-se dois aparelhos nos pontos C e D, visando-se sucessivamente os fios do retículo do outro aparelho).



3.46. Método de Hause

O método baseia-se na determinação do ângulo  $\omega$ , que permite relacionar as observações à superfície e no fundo da mina. Para esse efeito, define-se um referencial local, considerando a linha CD como eixo das abcissas e o ponto C como origem; nesse referencial calculam-se as coordenadas dos pontos P1 e P2, e portanto (figura 3.47.):

$$\omega_2 = a \tan \frac{x_C - x_{P_2}}{y_C - y_{P_2}}, \quad \omega_1 = a \tan \frac{x_{P_1} - x_{P_2}}{y_{P_1} - y_{P_2}}, \quad \omega = \omega_1 - \omega_2$$

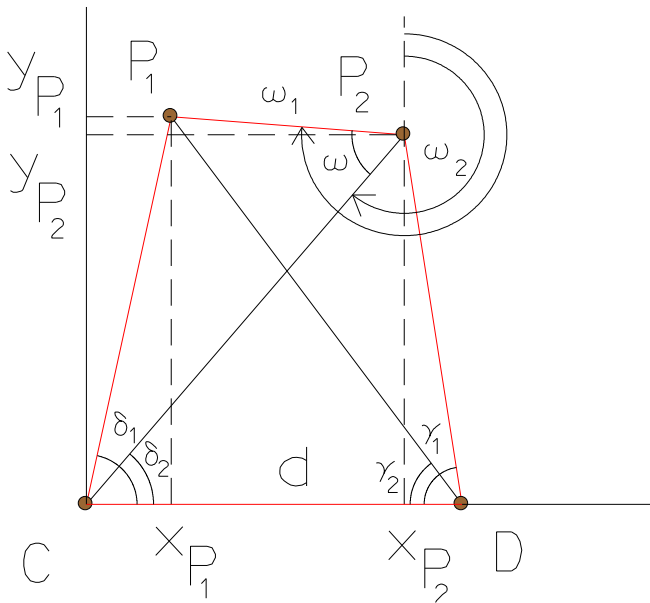


figura 3.47. Determinação do ângulo  $\omega$

Da figura anterior,

$$\begin{cases} x_C = 0, y_C = 0 \\ x_D = d, y_D = 0 \end{cases}$$

Do triângulo  $CDP_1$  tem-se:

$$\frac{\sin(\pi - \delta_1 - \gamma_2)}{d} = \frac{\sin \gamma_2}{CP_1} \Rightarrow CP_1 = d \frac{\sin \gamma_2}{\sin(\pi - \delta_1 - \gamma_2)}$$

donde

$$\begin{cases} x_{P_1} = x_C + CP_1 \cos \delta_1 \\ y_{P_1} = y_C + CP_1 \sin \delta_1 \end{cases}$$

Do triângulo  $CDP_2$  tem-se:

$$\frac{\sin(\pi - \gamma_1 - \delta_2)}{d} = \frac{\sin \delta_2}{DP_2} \Rightarrow DP_2 = d \frac{\sin \delta_2}{\sin(\pi - \gamma_1 - \delta_2)}$$

donde

$$\begin{cases} x_{P_2} = x_D - DP_2 \cos \gamma_1 \\ y_{P_2} = y_D + DP_2 \sin \gamma_1 \end{cases}$$

Efectuando estas substituições em  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , calcula-se  $\omega = \omega_1 - \omega_2$ . Como alternativa pode utilizar-se a expressão

$$\tan \omega = \frac{(y_C - y_{P_2})(x_{P_1} - x_{P_2}) - (x_C - x_{P_2})(y_{P_1} - y_{P_2})}{(y_C - y_{P_2})(y_{P_1} - y_{P_2}) + (x_C - x_{P_2})(x_{P_1} - x_{P_2})}$$

Uma vez calculado o ângulo  $\omega$ , pode efectuar-se o

transporte dos rumos:

- 1)  $R_{BA} = a \tan \frac{M_A - M_B}{P_A - P_B}$
- 2)  $\sin \beta_1 = \frac{c}{a} \sin \beta$  e  $\sin \beta_2 = \frac{b}{a} \sin \beta$
- 3)  $\varepsilon = \beta + \beta_1 + \beta_2 - \pi$
- 4)  $\bar{\beta} = \beta + \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\bar{\beta}_1 = \beta_1 + \frac{\varepsilon}{3}$ ,  $\bar{\beta}_2 = \beta_2 + \frac{\varepsilon}{3}$
- 5)  $R_{BP_1} = R_{BA} + \bar{\alpha} + \bar{\beta} - \pi$
- 6)  $R_{P_1P_2} = R_{BP_1} - \pi + \bar{\beta}_1$
- 7)  $R_{P_2C} = R_{P_1P_2} + \pi - \omega$
- 8)  $R_{CD} = R_{P_2C} - \pi + \delta_2$
- 9)  $M_{P_1} = M_B + b \sin R_{BP_1}$ ,  $P_{P_1} = P_B + b \cos R_{BP_1}$
- 10)  $M_{P_2} = M_{P_1} + a \sin R_{P_1P_2}$ ,  $P_{P_2} = P_{P_1} + a \cos R_{P_1P_2}$
- 11)  $M_C = M_{P_2} + P_2C \sin R_{P_2C}$ ,  $P_C = P_{P_2} + P_2C \cos R_{P_2C}$
- 12)  $M_D = M_C + d \sin R_{CD}$ ,  $P_D = P_C + d \cos R_{CD}$ .

A análise de erro do quadrilátero mostra que (1) a melhor configuração é um quadrado; (2) os melhores resultados são obtidos no seguinte caso (figura 3.48.), quando  $\sigma_\beta = \sigma_\alpha$ , onde  $\sigma_\alpha$  representa o desvio padrão médio dos ângulos medidos  $\delta_1, \delta_2, \gamma_1$  e  $\gamma_2$  e no caso onde o poço só tem acesso por um único lado,  $\sigma_\beta = 2.4\sigma_\alpha$ ; (3) aumentando a razão entre as distâncias CD e  $P_1P_2$ , o desvio padrão da orientação melhora.

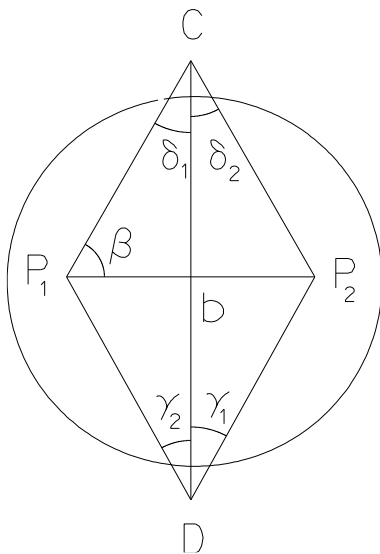


figura 3.48. Configuração mais favorável para o método de Hause

No caso de a mina ter acesso através de dois poços, a orientação pode ser efectuada da forma seguinte (figura 3.49.):

1) coloca-se uma carga suspensa em cada poço e as coordenadas  $M_1, P_1$  e  $M_2, P_2$  dos pontos  $P_1$  e  $P_2$  são determinadas à superfície (por exemplo através de uma poligonal).

2) calcula-se o rumo  $R_{1,2}$  e a distância  $d_{1,2}$  entre os pontos  $P_1$  e  $P_2$  tal que

$$R_{1,2} = a \tan \frac{M_2 - M_1}{P_2 - P_1} \text{ e } d_{1,2} = \sqrt{(M_2 - M_1)^2 + (P_2 - P_1)^2}$$

3) no fundo da mina, partindo do ponto  $P_1$  observa-se uma poligonal que percorre os pontos A, B e C, fechando no ponto  $P_2$ , no fundo da mina; naturalmente não é possível orientar esta poligonal, pelo que as coordenadas que se obtêm para os pontos A, B, C e  $P_2$  a partir dos ângulos entre visadas e das distâncias entre estações variam conforme o rumo inicial que seja considerado.

4) as distâncias medidas na mina são reduzidas ao nível de referência da superfície:  $\Delta d_i = d_i H / R$ , onde H é a profundidade e R o raio terrestre; a poligonal subterrânea é calculada num referencial local tendo como origem o ponto  $P_1$  e como eixo das abcissas a direcção  $P_1A$ .

5) sendo  $M'_2$  e  $P'_2$  as coordenadas obtidas para o ponto  $P_2$  a partir da poligonal observada no fundo da mina, calcula-se o rumo  $R'_{1,2}$  e a distância  $d'_{1,2}$  entre os pontos  $P_1$  e  $P'_2$  tal que

$$R'_{1,2} = a \tan \frac{M'_2 - M_1}{P'_2 - P_1} \text{ e } d'_{1,2} = \sqrt{(M'_2 - M_1)^2 + (P'_2 - P_1)^2}$$

6) o ângulo  $w$  de rotação e o factor de escala  $\lambda$  que é necessário imprimir à poligonal observada no fundo da mina de forma a que  $M'_2 = M_2$  e  $P'_2 = P_2$  são dados por  **$R'_{1,2} + w = R_{1,2}$**  e  **$\lambda = d_{1,2} / d'_{1,2}$** .

7) as coordenadas dos pontos da poligonal subterrânea são calculados no referencial da superfície utilizando as distâncias multiplicadas por  $\lambda$  e os rumos iniciais somados do ângulo  $w$ .

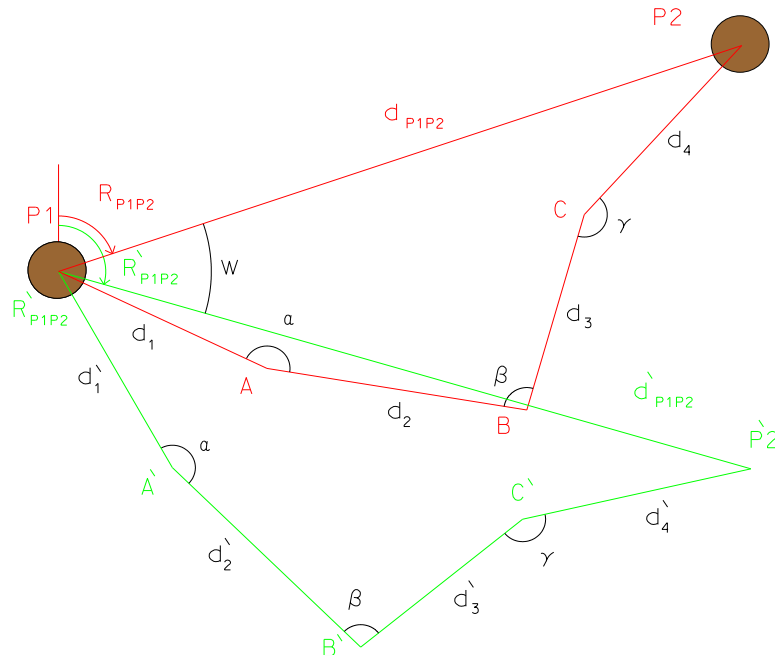


figura 3.49. Transporte da orientação utilizando dois poços



No caso de o poço de acesso à mina não ser muito profundo ( $< 100\text{ m}$ ) é possível utilizar um teodolito para transportar o rumo de uma direcção definida à superfície para o interior da mina: no exterior, estacionando o aparelho num andaime sobre a entrada do poço, determinam-se as coordenadas do ponto estação e estando o operador colocado numa plataforma independente, visa outro ponto conhecido, definindo o alinhamento que se pretende transportar. Girando a luneta de forma a visar o nadir, sob as instruções do operador é colocada no fundo do poço uma haste metálica cujos extremos podem ser deslocados de forma a que o fio vertical do retículo do aparelho contenha a haste metálica, o que materializa o alinhamento definido à superfície.

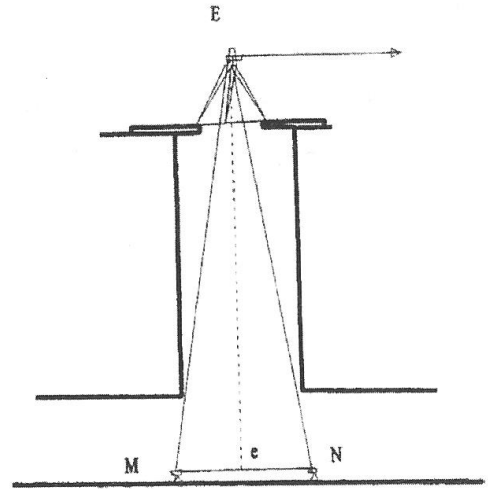


figura 3.50. Utilização de um teodolito para o transporte do rumo para o interior da mina

Estacionando o teodolito no fundo do poço, convenientemente equipado da efectuar leitural zenitais, dirige-se primeiro a visada para um ponto P no interior da mina e depois, fixando o movimento azimutal, gira-se a luneta de forma a visar o topo do poço e definem-se à superfície dois pontos em cada lado da entrada do poço, no mesmo plano vertical da direcção que contém o ponto P, sendo então determinado à superfície o rumo definido pelos dois pontos assinalados.

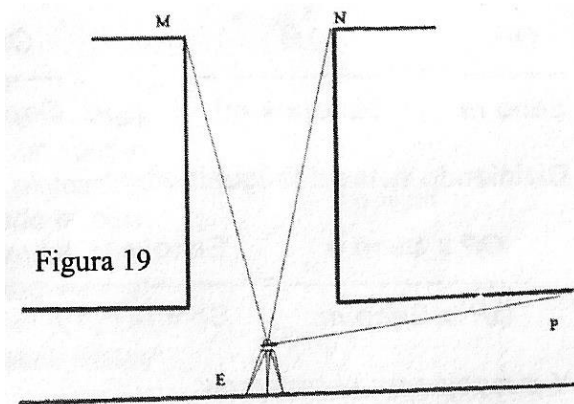
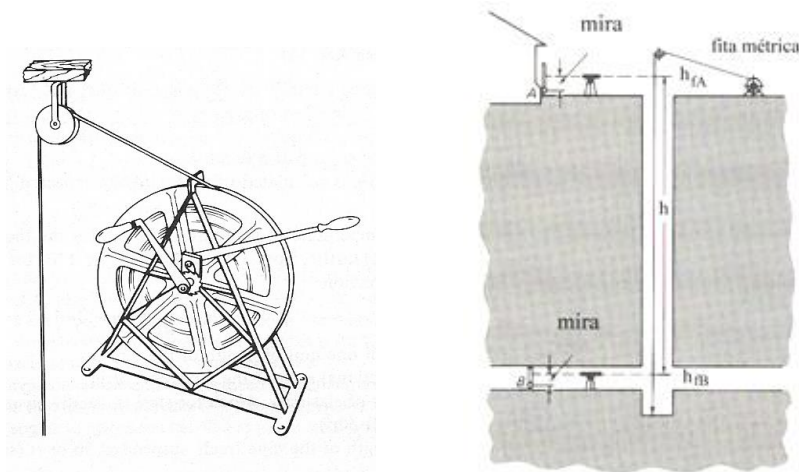


figura 3.51. Utilização de um teodolito para o transporte do rumo para o interior da mina

O transporte das cotas da superfície para o fundo da mina é efectuado através de fitas métricas apropriadas, com comprimento que pode atingir 1000 metros, guardadas em rolos especiais. O princípio do método é ilustrado na figura 3.52.: é suspenso um peso na fita métrica, entre 10 e 20 quilogramas (conforme o peso utilizado na calibração da fita), de tal forma que a respectiva extremidade ultrapasse o nível que se pretende cotar; coloca-se então uma mira sobre a marca cotada A junto à superfície e efectua-se, com um nível, as leituras  $h_{mA}$  na mira e  $h_{fA}$ , na fita métrica; no fundo da mira, repete-se este procedimento, com a mira colocada sobre a marca B que se pretende cotar, obtendo-se as leituras  $h_{mB}$  na mira e  $h_{fB}$  na fita métrica; sendo  $H_A$  a cota do ponto A, a cota  $H_B$  do ponto B é dada por:



$$H_B = H_A - h + h_{mA} - h_{mB}, \text{ com } h = h_{fB} - h_{fA}$$

sendo a diferença das leituras efectuadas na fita métrica.

figura 3.52. Transporte da cota de A para B utilizando uma fita métrica

As observações à superfície e no fundo da mina devem ser efectuadas em simultâneo, constando geralmente de um conjunto de 10 leituras, sendo alterada a posição da fita métrica entre observações (subindo ou baixando a fita métrica alguns centímetros). Como as fitas métricas têm normalmente marcações de 10 em 10 centímetros, são aplicadas réguas com marcação milimétrica nas zonas de interesse.

O valor  $h$  medido  $h$  deve ser corrigido por aplicação das correcções de calibração, de temperatura e de tensão, de acordo com o peso utilizado. O valor nominal do comprimento da fita, fornecido pelo fabricante, raramente coincide com o valor real; este último é determinado por comparação com um comprimento padrão conhecido (calibração), em determinadas condições de temperatura e tensão. Assume-se que a discrepância  $C_d = \text{valor real} - \text{valor nominal}$  se distribui uniformemente ao longo da fita e é proporcional à porção da fita utilizada. A fita expande-se com o aumento da temperatura e contraí-se com a diminuição de temperatura. Assim, se o comprimento padrão tiver sido determinado para uma dada temperatura, para temperaturas superiores obtém-se um comprimento maior e para temperaturas inferiores obtém-se um comprimento menor: uma variação de  $15^\circ\text{C}$  produz uma variação no comprimento da fita de  $0.17 \text{ m/km}$ , pelo que mesmo no caso de baixa precisão, a influência da expansão térmica tem consequências. O coeficiente de expansão térmico  $\alpha$  do aço é aproximadamente igual a  $11.6 \times 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , pelo que se o comprimento padrão da fita tiver sido determinado para a temperatura  $T_0$  e as medições forem realizadas à temperatura  $T$ , a correcção  $C_T$  devida à variação de comprimento é dada por  $C_{\text{Temperatura}} = \alpha L(T - T_0)$ , onde  $L$  é o comprimento medido (este tipo de erro é muito reduzido no caso de utilização de fitas de ínvar). Deve notar-se que ao longo do poço se verificam grandes variações de temperatura, que devem ser medidas todos os 30 a 50 metros, durante o transporte da cota. Sendo  $T_i$  a temperatura ao nível  $h_i$ , pode-se determinar a temperatura média como:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n [(h_{i+1} - h_i)(T_i + T_{i+1})]}{2(h_n - h_1)}$$

A correcção de tensão é dada pela expressão

$$C_{\text{Tensão}} = \frac{w}{aE} \left( Lh - \frac{h^2}{2} \right)$$

onde  $w$  é o peso por unidade de comprimento da fita métrica,  $a$  é a área da secção transversal da fita métrica ( $\text{cm}^2$ ),  $E$  é o módulo de elasticidade (para o aço tem o valor  $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ) e  $L$  é o comprimento da fita suspensa (m). No caso de a tensão utilizada ser superior ou inferior à que foi utilizada para a calibração da fita métrica, a fita aumenta ou diminui o seu comprimento. A correcção para este efeito é dada pela expressão

$$C_P = \frac{(P - P_0)L}{aE}$$

com  $P$  e  $P_0$  sendo respectivamente as tensões aplicadas na medição na mina e na calibração (kg). O valor do produto  $aE$  deve ser verificado experimentalmente, determinando  $C_P$  para pesos diferentes e calculando  $aE$  pela expressão anterior.

O transporte de cota ao longo de um poço vertical pode igualmente ser efectuado através de distanciómetros, no caso de a visibilidade ser favorável. As alturas dos centros do aparelho e do reflector têm de ser rigorosamente determinadas por nivelamento, o que exige a construção de plataformas muito estáveis. Outra hipótese é a utilização de um distanciómetro estacionado na sua posição normal, juntamente com um prisma para direccionar o sinal electromagnético para o fundo do poço.

A informação da localização do eixo de um túnel é fornecida pelo projectista, numa forma similar à indicada nas figuras 3.53. e 3.54. (<http://www.powerhousemuseum.com/hsc/snowy/civil.htm>).

No caso do traçado em planta, é conhecido:

- as coordenadas dos pontos extremos A e B e dos pontos de contacto com a superfície através de poços verticais de ventilação (JS)
- as coordenadas dos pontos de intersecção das tangentes (V=PI) e respectivos rumos
- para cada curva: PC, PT, Δ (ângulo de deflexão), L (comprimento do arco circular), R (raio), T (comprimento da tangente)

No caso do perfil longitudinal, são dadas as cotas e os gradientes dos traineis da soleira (parte inferior do revestimento do túnel).

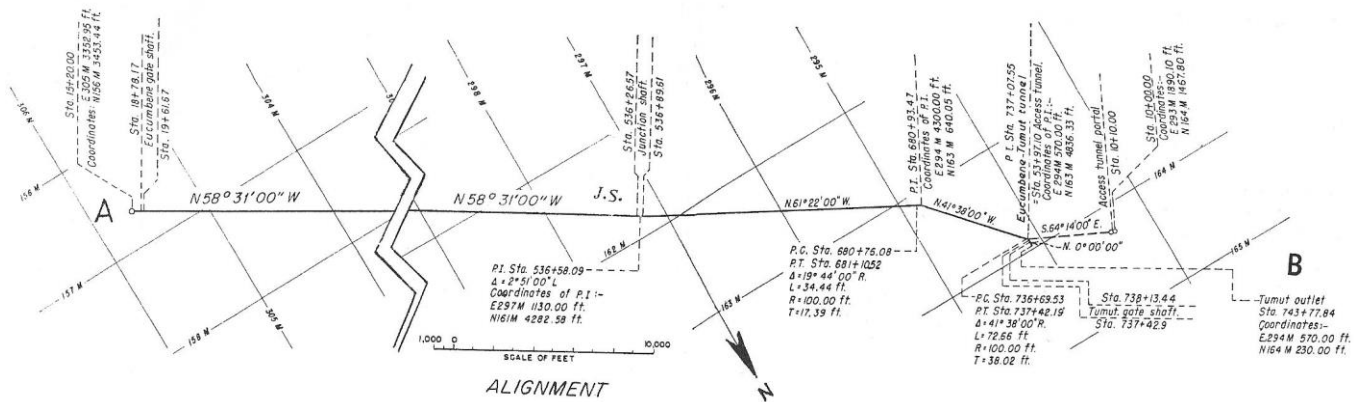


figura 3.53. Exemplo: representação em planta do túnel Eucumbene-Tumut, Austrália

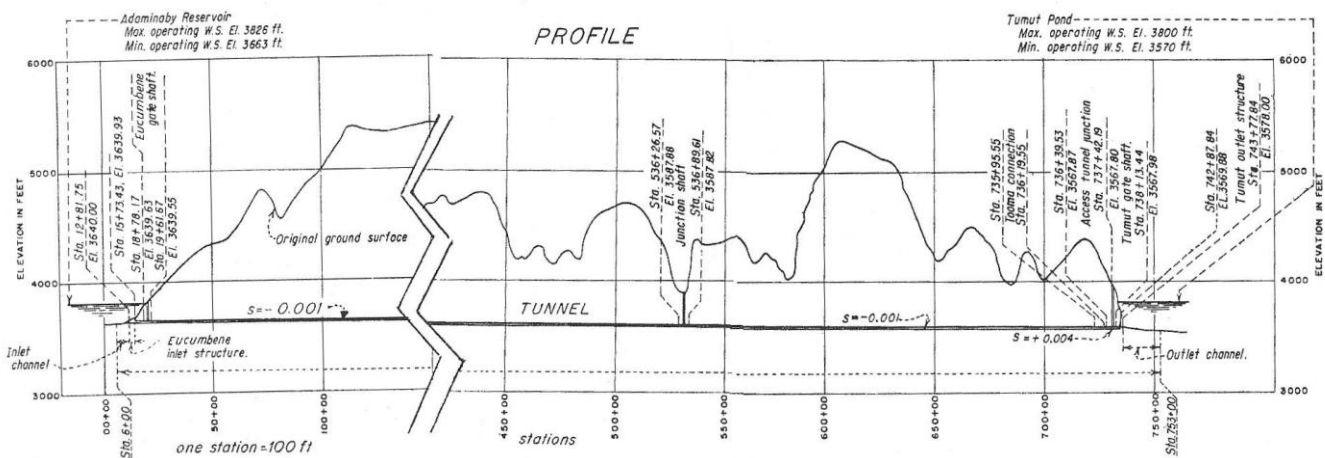


figura 3.54. Exemplo: representação em perfil longitudinal do túnel Eucumbene-Tumut, Austrália

A partir do projecto, realizado sobre a cartografia existente numa escala adequada, trata-se em primeiro lugar de identificar no terreno os pontos extremos e poços de ventilação, cuja posição deve ser monumentalizada de forma permanente e passível de ser reconstituída a partir de pontos de apoio. Identificada a posição do ponto A a partir da rede de apoio à obra, determina-se de acordo com o projecto o rumo de saída (no ponto B é seguido o mesmo procedimento). A partir daqui, perfurando de acordo com as especificações do projecto, as duas directrizes devem encontrar-se com a menor discrepância possível. Quanto maior for o comprimento do túnel, maior é a precisão requerida, devendo verificar-se a regra geral de que a ligação subterrânea entre os pontos extremos deve ser tão directa quanto possível.

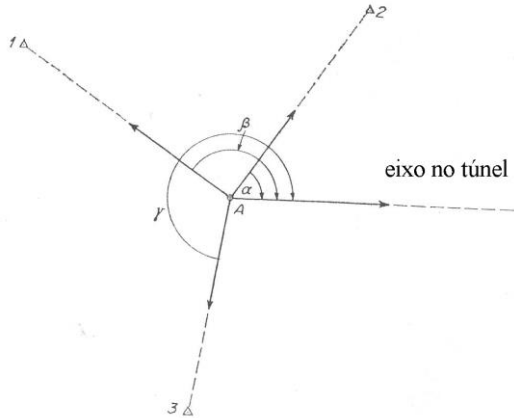


figura 3.55. Definição do ponto A e do rumo de saída nesse ponto utilizando a rede de apoio

Na grande generalidade dos casos, a precisão da rede geodésica existente não é suficiente para garantir a precisão necessária a este tipo de trabalhos, quer a nível angular quer a nível de escala, pelo que é instalada uma rede local, definida a partir de uma triangulação que inclua os pontos extremos e os pontos à superfície onde irão ser localizados os poços de ventilação (figura 3.56.).

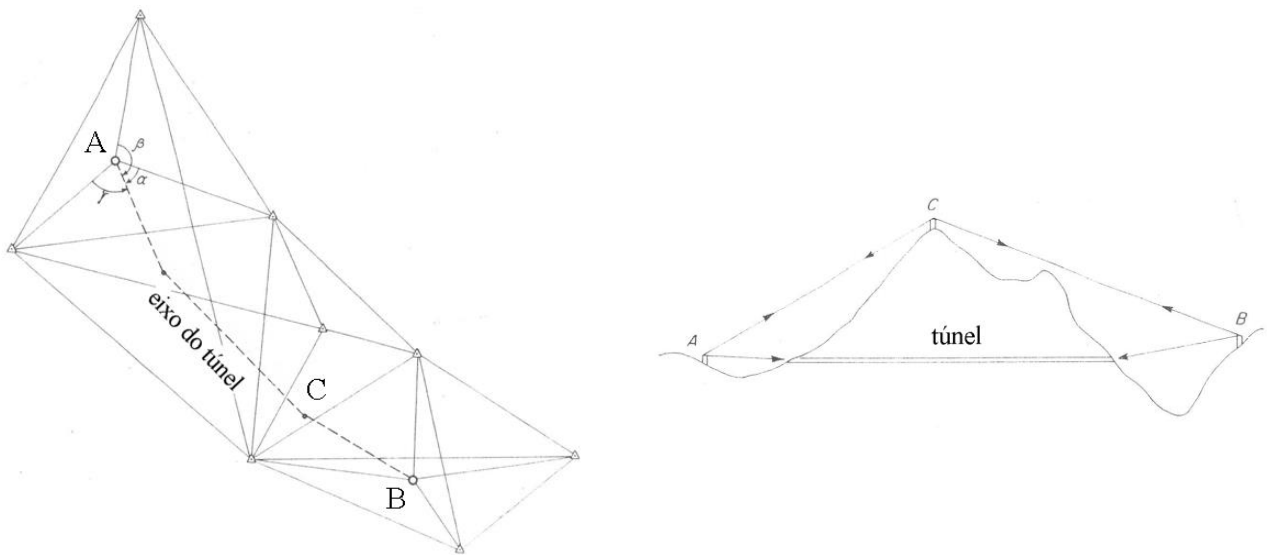


figura 3.56. Rede local de apoio à implantação da obra: traçado em planta e perfil longitudinal

Os erros aleatórios e sistemáticos em escala, que produzem um desvio a nos comprimentos ao longo da directriz, não têm significado no caso de esta ser rectilínea, traduzindo-se num encontro mais cedo ou mais tarde do que o planeado entre as duas perfurações. Verificam-se desvios laterais quando a directriz é em curva ou quando esta deflecte, que são proporcionais ao seno do ângulo de deflexão (figura 3.57.).

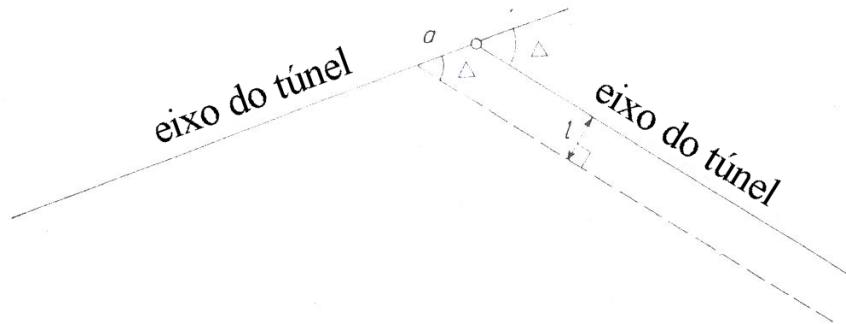


figura 3.57. Desvio lateral no eixo do túnel

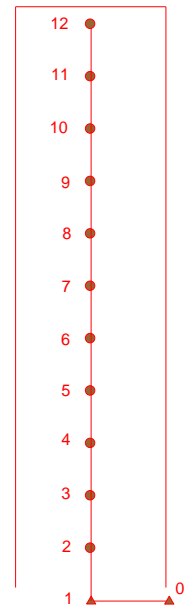
## Bibliografia:

- Surveying. Theory and Practice. Davis, Foote, Anderson, Mikhail. McGraw-Hill
- Advanced Engineering Surveying. Shepherd F. A.. Edward Arnold Ed.
- Engineering Surveying. Schofield W.. Butterworth-Heinemann
- Geomatics. Kavanagh B. F.. Prentice Hall.

Exercícios

- Um túnel com 11 km de comprimento foi escavado paralelamente ao eixo das ordenadas, sendo o controlo da obra efectuado a partir da poligonal com a mesma direcção, com estação inicial no ponto 1 e com orientação para o ponto 0, ambos de coordenadas conhecidas e consideradas isentas de erro, sendo a distância entre estações consecutivas igual a 1 km, com  $\sigma_d=0.01m$ . Em que caso se obteria uma precisão melhor para as coordenadas do ponto 12, observando os ângulos entre visadas com um desvio padrão igual a  $\sigma_\alpha=2''$  ou observando os azimutes em cada estação com um giroscópio, com desvio padrão igual a  $\sigma_R=20''$  ? Comente o resultado obtido.

As redes de controlo horizontal subterrâneas são constituídas por poligonais abertas, as quais podem ser de 1ª ordem, utilizadas como estrutura fundamental, de 2ª ordem, utilizadas em áreas em expansão, e de 3ª ordem, utilizadas em levantamentos de pormenor nessas mesmas áreas. Em geral, são permitidos os seguintes erros máximos na posição relativa dos pontos de referência: 1/10000 no caso de poligonais de 1ª ordem, 1/5000 no caso de poligonais de 2ª ordem e 1/1000 no caso de poligonais de 3ª ordem, sendo estes valores interpretados como o quociente entre o semi-eixo maior da elipse de erro e a distância entre os pontos considerados. Qual é a ordem das poligonais observadas com esses dois métodos?



- Considere uma poligonal com 5.5 km de comprimento, com origem no ponto 1 e com orientação a partir do ponto 0, ambos de coordenadas conhecidas e consideradas isentas de erro. A poligonal desenvolve-se ao longo do eixo M e todas as distâncias são iguais a 500 m (com  $\sigma_d=0.010m$ ), observando-se em cada estação, sucessivamente, o ângulo entre visadas e o rumo (com um giroscópio), com desvios padrão iguais a  $\sigma_\alpha=4''$  e  $\sigma_R=15''$ , respectivamente. Calcule as coordenadas da estação 12 a partir das coordenadas (0,0) da estação origem assim como a respectiva precisão, utilizando a lei de propagação de variâncias-covariâncias para os modos goniométrico e declinado. Comente o resultado obtido.
- Sendo dadas as coordenadas dos pontos 1 a 4 de uma poligonal observada em modo goniométrico, e admitindo que a precisão da observação dos ângulos e das distâncias foi, respectivamente,  $\sigma_\alpha=10''$  e  $\sigma_d=10$  mm, calcule a elipse de erro para o ponto 4:

| Ponto | M (m)  | P (m)  |
|-------|--------|--------|
| 1     | 300.00 | 100.00 |
| 2     | 400.00 | 200.00 |
| 3     | 500.00 | 200.00 |
| 4     | 600.00 | 200.00 |



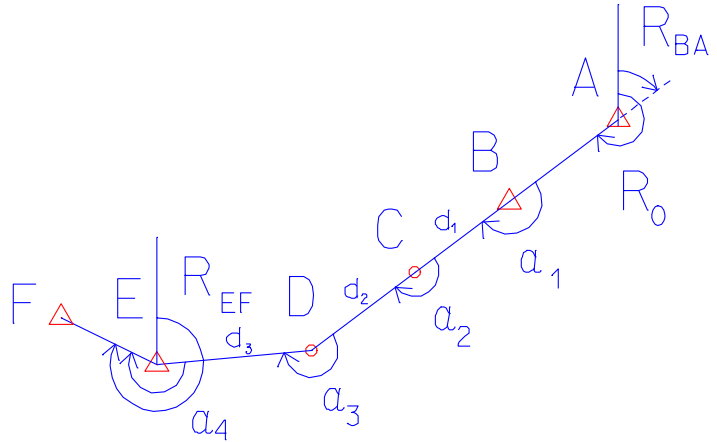
4. Considere a poligonal fechada seguinte, com início no ponto B e fim no ponto E, sendo C e D pontos intermédios. As observações são supostas não correlacionadas e com igual precisão. Calcule e ajuste a poligonal. Admitindo agora que a poligonal é aberta, calcule a elipse de erro para o ponto D:

|            | Ângulos       | sigma |
|------------|---------------|-------|
| $\alpha_1$ | 172° 53' 34'' | 2''   |
| $\alpha_2$ | 185° 22' 14'' | 2''   |
| $\alpha_3$ | 208° 26' 19'' | 2''   |
| $\alpha_4$ | 205° 13' 51'' | 2''   |

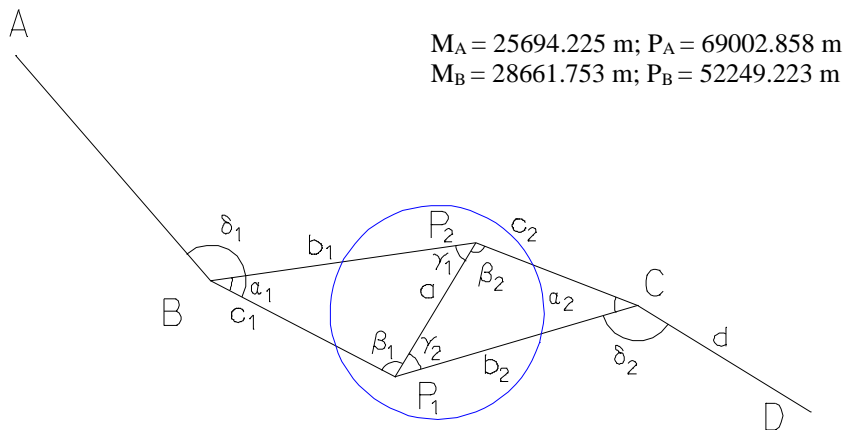
|                | Distâncias | sigma   |
|----------------|------------|---------|
| D <sub>1</sub> | 281.832 m  | 0.016 m |
| D <sub>2</sub> | 271.300 m  | 0.016 m |
| D <sub>3</sub> | 274.100 m  | 0.016 m |

|                 | Rumos           |
|-----------------|-----------------|
| R <sub>BA</sub> | 68° 15' 20.7''  |
| R <sub>EF</sub> | 300° 11' 30.5'' |

| coordenadas | M        | P        |
|-------------|----------|----------|
| B           | 8478.139 | 2483.826 |
| E           | 7709.336 | 2263.411 |



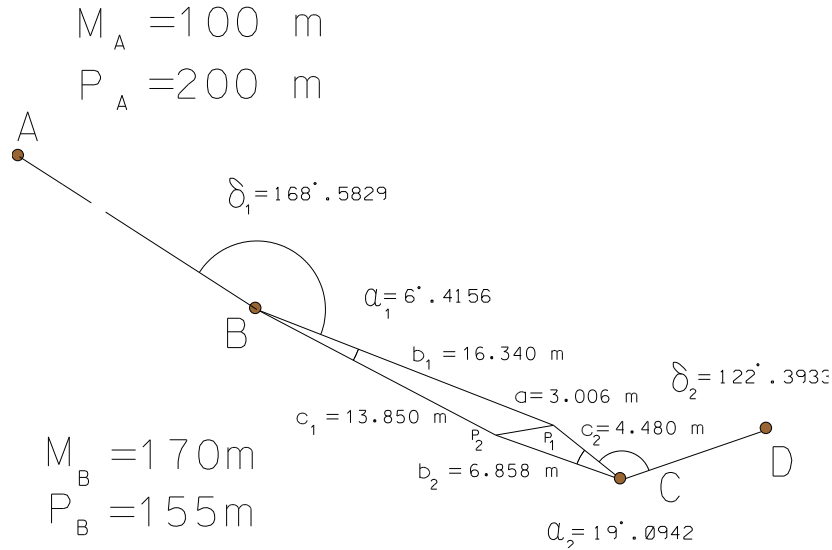
5. Conhecendo as coordenadas dos pontos A e B da superfície, utilize o método de Weisbach para determinar as coordenadas dos pontos C e D do interior da mina. A configuração observada é recomendável do ponto de vista da influência dos erros de observação no resultado final?



$M_A = 25694.225$  m;  $P_A = 69002.858$  m  
 $M_B = 28661.753$  m;  $P_B = 52249.223$  m

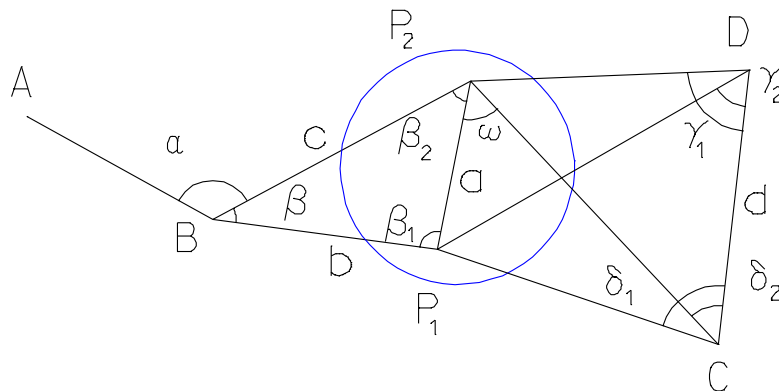
$\delta_1 = 158^\circ.24$ ;  $\alpha_1 = 35^\circ.7765$ ;  
 $\delta_2 = 131^\circ.8517$ ;  $\alpha_2 = 37^\circ.5886$   
 $a = 2.934$  m;  $d = 3.803$  m;  $b_1 = 5.008$  m;  $c_1 = 3.880$  m;  $b_2 = 4.737$  m;  $c_2 = 3.247$  m

6. Utilizando o método de Weisbach para o transporte de coordenadas e considerando que os desvios padrão dos ângulos observados, das distâncias e das prumadas são  $\sigma_\delta=10''$ ,  $\sigma_b=\sigma_c=5$  mm,  $\sigma_a=2$  mm e  $\sigma_p=10''$ , respectivamente, calcule as coordenadas do ponto C, o rumo da direção CD, assim como o erro associado a esta última quantidade.



7. Supondo conhecidas as coordenadas dos pontos A e B da superfície, utilize o método de Hause para determinar as coordenadas dos pontos do interior da mina. Qual é a configuração geométrica mais conveniente em termos de minimização de erros de observação?

$$\left\{ \begin{array}{l} M_A = 45197.409 \text{ m}; P_A = 52152.550 \text{ m} \\ M_B = 45200.583 \text{ m}; P_B = 52150.775 \text{ m} \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 122^\circ.4902 \\ \beta = 35^\circ.7769 \\ \delta_1 = 77^\circ.8607 \\ \gamma_1 = 81^\circ.2553 \\ \delta_2 = 49^\circ.7995 \\ \gamma_2 = 53^\circ.6156 \end{array} \right. ; \left\{ \begin{array}{l} a = 2.934 \text{ m} \\ b = 3.878 \text{ m} \\ c = 5.008 \text{ m} \\ d = 4.717 \text{ m} \end{array} \right.$$



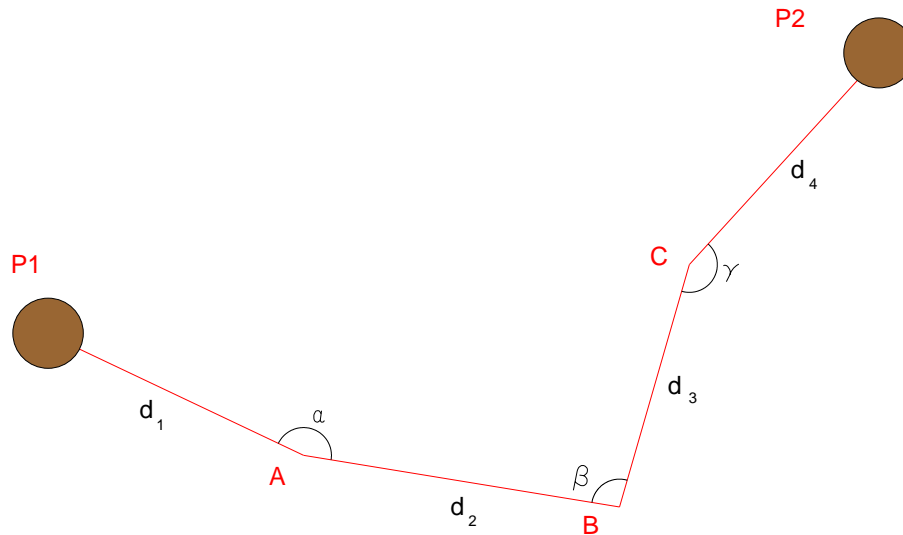
8. Considerando a figura seguinte, onde  $P_1$  e  $P_2$  representam 2 poços onde foram suspensos 2 fios de prumo com o objectivo de transportar o apoio topográfico para o interior da mina, cuja profundidade é  $H=456.123$  m, calcule as coordenadas dos pontos A, B e C no referencial utilizado à superfície:

$$M_1=25558.257 \text{ m}; P_1=65769.466 \text{ m}$$

$$M_2=26585.111 \text{ m}; P_2=66117.494 \text{ m}$$

$$d_1=347.092 \text{ m}; d_2=395.622 \text{ m}; d_3=312.972 \text{ m}; d_4=351.828 \text{ m}$$

$$\alpha=163^\circ.8497; \beta=96^\circ.7161; \gamma=153^\circ.7702$$



9. O transporte do apoio topográfico para o interior de uma mina é realizado através de dois fios-de-prumo suspensos num poço vertical de  $H=300$  m de profundidade, sendo a distância entre os fios igual a 4 m. São utilizados fios de aço cuja tensão máxima é igual a  $200 \text{ kg/mm}^2$ , sendo a altura da galeria no fundo da mina igual a 5 m e a velocidade da corrente de ar na secção transversal à galeria igual a 1 m/s. Não existindo outras aberturas na mina
- Qual é o diâmetro mais apropriado dos cabos de aço e qual é o peso que deve ser utilizado?
  - Qual deve ser a distância entre as plataformas no fundo da mina?
  - Qual será, para efeitos de verificação, o período de oscilação dos fios-de-prumo?
  - Qual o erro no transporte do rumo que se pode esperar devido aos efeitos precedentes e ao efeito da forma espiralada do cabo (considere  $r=15$  cm)?

1.

$$R_i = 0^\circ, d_i = 1000 \text{ m}, i = 1, \dots, 11$$

$$M_k = M_1 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \sin R_i = M_1, k = 2, \dots, 12$$

$$P_k = P_1 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \cos R_i = P_1 + 1000(k - 1), k = 2, \dots, 12$$

Para  $k=12$ , tem-se  $M_{12}=M_1, P_{12}=P_1+11000 \text{ m}$

Modo goniométrico:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{M_{12}}^2 &= \sum_{i=1}^{11} (P_{12} - P_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{M_{i+1} - M_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = (11000^2 + 10000^2 + \dots + 1000^2) \times \left( \frac{2\pi}{3600 \times 180} \right)^2 = 0.0476 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_{12}} = 0.218 \text{ m} \\ \sigma_{P_{12}}^2 &= \sum_{i=1}^{11} (M_{12} - M_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{P_{i+1} - P_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 11 \times 0.01^2 = 0.0011 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{P_{12}} = 0.033 \text{ m} \\ \sigma_{M_{12}P_{12}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Modo declinado:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{M_{12}}^2 &= \sum_{i=1}^{11} (P_{i+1} - P_i)^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{M_{i+1} - M_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 11 \times 1000^2 \times \left( \frac{20\pi}{3600 \times 180} \right)^2 = 0.1034 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_{12}} = 0.322 \text{ m} \\ \sigma_{P_{12}}^2 &= \sum_{i=1}^{11} (M_{i+1} - M_i)^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{P_{i+1} - P_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 11 \times 0.01^2 = 0.0011 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{P_{12}} = 0.033 \text{ m} \\ \sigma_{M_{12}P_{12}} &= 0 \end{aligned} \right.$$

A precisão com que se obtêm as coordenadas do ponto 12 é melhor utilizando rumos calculados a partir dos ângulos observados (modo goniométrico) do que utilizando rumos observados directamente em cada estação da poligonal (modo declinado) pois neste caso a precisão  $\sigma_\alpha$  com que se observaram os ângulos é suficientemente melhor do que a precisão  $\sigma_R$  com que se observaram os rumos. Nestas condições, ultrapassa-se o problema da acumulação de erros nos rumos calculados a partir dos ângulos observados nas sucessivas estações.

$$a_{\text{declinado}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{M_{12}}^2 + \sigma_{P_{12}}^2) + \sqrt{(\sigma_{M_{12}}^2 + \sigma_{P_{12}}^2)^2 - 4\sigma_{M_{12}}^2 \sigma_{P_{12}}^2}}{2}} = 0.322 \text{ m} \Rightarrow \frac{0.322}{11000} = 2.9272(72) \times 10^{-5} < 1 \times 10^{-4} : 1^\text{a} \text{ ordem}$$

$$a_{\text{goniométrico}} = \sqrt{\frac{(\sigma_{M_{12}}^2 + \sigma_{P_{12}}^2) + \sqrt{(\sigma_{M_{12}}^2 + \sigma_{P_{12}}^2)^2 - 4\sigma_{M_{12}}^2 \sigma_{P_{12}}^2}}{2}} = 0.218 \text{ m} \Rightarrow \frac{0.218}{11000} = 1.9818(18) \times 10^{-5} < 1 \times 10^{-4} : 1^\text{a} \text{ ordem}$$

2.

$R_i=90^\circ, i=1, \dots, k-1; d_i=500 \text{ m}, i=1, \dots, k-1$

$$\begin{cases} M_k = M_1 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \sin R_i = M_1 + (k-1) \times 500 = (k-1) \times 500 \text{ m} \\ P_k = P_1 + \sum_{i=1}^{k-1} d_i \cos R_i = P_1 = 0 \text{ m} \end{cases} \quad k=2, \dots, 12$$

Para  $k=12$ , tem-se  $M_{12}=11 \times 500=5500 \text{ m}, P_{12}=0 \text{ m}$

Modo declinado:

$$\begin{cases} \sigma_{M_{12}}^2 = \sum_{i=1}^{11} (P_{i+1} - P_i)^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{M_{i+1} - M_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 11 \times \sigma_{d_i}^2 = 0.0011 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_{12}} = 0.033 \text{ m} \\ \sigma_{P_{12}}^2 = \sum_{i=1}^{11} (M_{i+1} - M_i)^2 \sigma_{R_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{P_{i+1} - P_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 11 \times 500^2 \times \left( \frac{15\pi}{3600 \times 180} \right)^2 = 0.0145 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{P_{12}} = 0.121 \text{ m} \\ \sigma_{M_{12}P_{12}} = 0 \end{cases}$$

Modo goniométrico:

$$\begin{cases} \sigma_{M_{12}}^2 = \sum_{i=1}^{11} (P_{12} - P_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{M_{i+1} - M_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 11 \times \sigma_{d_i}^2 = 0.0011 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{M_{12}} = 0.033 \text{ m} \\ \sigma_{P_{12}}^2 = \sum_{i=1}^{11} (M_{12} - M_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{11} \left( \frac{P_{i+1} - P_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = (5500^2 + 5000^2 + \dots + 500^2) \times \left( \frac{\pi}{900 \times 180} \right)^2 = 0.0476 \text{ m}^2 \Rightarrow \sigma_{P_{12}} = 0.218 \text{ m} \\ \sigma_{M_{12}P_{12}} = 0 \end{cases}$$

Como a poligonal se desenvolve ao longo do eixo M, a variância de  $M_{12}$  é idêntica nos dois casos. A variância de  $P_{12}$  é menor no caso declinado do que no caso goniométrico, embora os ângulos tenham sido observados com uma precisão superior à dos rumos. Este resultado deve-se ao facto de que no caso goniométrico o rumo em cada estação é obtido a partir dos ângulos observados até esse ponto, o que se traduz numa acumulação de erros, que no caso de poligonais longas pode ter resultar numa precisão baixa nas coordenadas dos pontos finais.

3.

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{M_4}^2 &= \sum_{i=1}^3 (P_4 - P_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{M_{i+1} - M_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = 100^2 \times \left( \frac{10\pi}{3600 \times 180} \right)^2 + \left( \frac{100^2}{2 \times 100^2} + 2 \times \frac{100^2}{100^2} \right) \times 0.01^2 = 2.7350 \times 10^{-4} \\ \sigma_{P_4}^2 &= \sum_{i=1}^3 (M_4 - M_i)^2 \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^3 \left( \frac{P_{i+1} - P_i}{d_i} \right)^2 \sigma_{d_i}^2 = (300^2 + 200^2 + 100^2) \times \left( \frac{10\pi}{3600 \times 180} \right)^2 + \frac{100^2}{100^2 + 100^2} \times 0.01^2 = \\ \sigma_{M_4 P_4} &= - \sum_{i=1}^3 (M_4 - M_i)(P_4 - P_i) \sigma_{\alpha_i}^2 + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{(M_{i+1} - M_i)(P_{i+1} - P_i)}{d_i^2} \sigma_{d_i}^2 = -300 \times 100 \times \left( \frac{10\pi}{3600 \times 180} \right)^2 + \frac{100 \times 100}{100^2 + 100^2} \times 0.01^2 = -2.0513 \times 10^{-5} \end{aligned} \right.$$

$$\Rightarrow \sigma_{M_4} = 0.017 \text{ m}$$

$$\Rightarrow \sigma_{M_4} = 0.019 \text{ m}$$

$$a = \sqrt{\lambda_1} = \sqrt{\frac{(\sigma_{M_4}^2 + \sigma_{P_4}^2) + \sqrt{(\sigma_{M_4}^2 + \sigma_{P_4}^2)^2 - 4 \times (\sigma_{M_4}^2 \sigma_{P_4}^2 - \sigma_{M_4 P_4}^2)}}{2}} = 0.020 \text{ m}$$

$$b = \sqrt{\lambda_2} = \sqrt{\frac{(\sigma_{M_4}^2 + \sigma_{P_4}^2) - \sqrt{(\sigma_{M_4}^2 + \sigma_{P_4}^2)^2 - 4 \times (\sigma_{M_4}^2 \sigma_{P_4}^2 - \sigma_{M_4 P_4}^2)}}{2}} = 0.016 \text{ m}$$

$$\theta = \frac{1}{2} a \tan \frac{2\sigma_{M_4 P_4}}{\sigma_{P_4}^2 - \sigma_{M_4}^2} = 100^\circ.619690$$

4.

```

real*8 alfa1,alfa2,alfa3,alfa4
real*8 A0,A1,A2,A3,A4,A5
real*8 d1,d2,d3
real*8 X1,Y1,X2,Y2,X3,Y3,X4,Y4,X5,Y5
real*8 pi
real*8 eang,ex,ey,epla
real*8 calfa1,calfa2,calfa3,calfa4
real*8 cA1,cA2,cA3,cA4
real*8 X2c,Y2c,X3c,Y3c,X4c,Y4c
real*8 s2x,s2y,s2xy,s2xc,s2yc,s2xyc,s2a,s2d
real*8 d1c,d2c,d3c
real*8 a,b,teta,ac,bc,tetac
open (8,file='pol.dat',access='append')
pi=4.d0*datan(1.d0)
alfa1=172.d0+53.d0/60.d0+34.d0/3600.d0
alfa2=185.d0+22.d0/60.d0+14.d0/3600.d0
alfa3=208.d0+26.d0/60.d0+19.d0/3600.d0
alfa4=205.d0+13.d0/60.d0+51.d0/3600.d0
write (8,*) ' Angulos observados:'
write (8,*)
write (8,*) ' alfa1=',alfa1
write (8,*) ' alfa2=',alfa2
write (8,*) ' alfa3=',alfa3
write (8,*) ' alfa4=',alfa4
write (8,*)
A0=68.d0+15.d0/60.d0+20.7d0/3600.d0
A5=300.d0+11.d0/60.d0+30.5d0/3600.d0
write (8,*) ' Azimutes nos pontos extremos:'
write (8,*)
write (8,*) ' A0=',A0
    
```

```

write (8,*) ' A4=',A5
write (8,*)
d1=281.832d0
d2=271.300d0
d3=274.100d0
write (8,*) ' Distancias observadas:'
write (8,*)
write (8,*) ' d1=',d1
write (8,*) ' d2=',d2
write (8,*) ' d3=',d3
write (8,*)
A1=A0+alfa1
A2=A0+alfa1+alfa2-180.d0
A3=A0+alfa1+alfa2+alfa3-360.d0
A4=A0+alfa1+alfa2+alfa3+alfa4-540.d0
write (8,*) ' Azimutes transportados:'
write (8,*)
write (8,*) ' A1=',A1
write (8,*) ' A2=',A2
write (8,*) ' A3=',A3
write (8,*) ' A4=',A4
write (8,*)
X1=8478.139d0
Y1=2483.826d0
X5=7709.336d0
Y5=2263.411d0
write (8,*) ' Coordenadas dos pontos extremos:'
write (8,*)
write (8,*) ' X1,Y1=',X1,Y1
write (8,*) ' X4,Y4=',X5,Y5
write (8,*)
X2=X1+d1*dsin(A1*pi/180.d0)
Y2=Y1+d1*dcos(A1*pi/180.d0)
X3=X1+d1*dsin(A1*pi/180.d0)+d2*dsin(A2*pi/180.d0)
Y3=Y1+d1*dcos(A1*pi/180.d0)+d2*dcos(A2*pi/180.d0)
X4=X1+d1*dsin(A1*pi/180.d0)+d2*dsin(A2*pi/180.d0)+d3*dsin(A3*pi/180.d0)
Y4=Y1+d1*dcos(A1*pi/180.d0)+d2*dcos(A2*pi/180.d0)+d3*dcos(A3*pi/180.d0)
write (8,*) ' Coordenadas transportadas:'
write (8,*)
write (8,*) ' X1,Y1=',X1,Y1
write (8,*) ' X2,Y2=',X2,Y2
write (8,*) ' X3,Y3=',X3,Y3
write (8,*) ' X4,Y4=',X4,Y4
write (8,*)
eang=A5-A4
ex=X5-X4
ey=Y5-Y4
epla=dsqrt(ex**2+ey**2)
write (8,*) ' Erros de fecho:'
write (8,*)
write (8,*) ' eang=',eang
write (8,*) ' ex=',ex
write (8,*) ' ey=',ey
write (8,*) ' epla=',epla
write (8,*)
calfa1=alfa1+eang/4.d0
calfa2=alfa2+eang/4.d0
calfa3=alfa3+eang/4.d0
calfa4=alfa4+eang/4.d0
write (8,*) ' Angulos compensados:'
write (8,*)
write (8,*) ' alfa1c=',calfa1
write (8,*) ' alfa2c=',calfa2
write (8,*) ' alfa3c=',calfa3
write (8,*) ' alfa4c=',calfa4
write (8,*)
cA1=A1+eang/4.d0
cA2=A2+2.d0*eang/4.d0
cA3=A3+3.d0*eang/4.d0
cA4=A4+eang

```

```

write (8,*) ' Azimutes compensados:'
write (8,*)
write (8,*) ' A1c=',cA1
write (8,*) ' A2c=',cA2
write (8,*) ' A3c=',cA3
write (8,*) ' A4c=',cA4
write (8,*)
X2c=X2+d1*ex/(d1+d2+d3)
Y2c=Y2+d1*ey/(d1+d2+d3)
X3c=X3+(d1+d2)*ex/(d1+d2+d3)
Y3c=Y3+(d1+d2)*ey/(d1+d2+d3)
X4c=X4+ex
Y4c=Y4+ey
write (8,*) ' Coordenadas compensadas:'
write (8,*)
write (8,*) ' X2c,Y2c=',X2c,Y2c
write (8,*) ' X3c,Y3c=',X3c,Y3c
write (8,*) ' X4c,Y4c=',X4c,Y4c
write (8,*)
d1c=dsqrt((X2c-X1)**2+(Y2c-Y1)**2)
d2c=dsqrt((X3c-X2c)**2+(Y3c-Y2c)**2)
d3c=dsqrt((X4-X3c)**2+(Y4-Y3c)**2)
write (8,*) ' Distancias compensadas:'
write (8,*)
write (8,*) ' d1c=',d1c
write (8,*) ' d2c=',d2c
write (8,*) ' d3c=',d3c
write (8,*)
s2a=(pi/(180.d0*1800.d0))**2
s2d=0.016d0**2
s2x=(Y3-Y1)*s2a+(Y3-Y2)*s2a+(X2-X1)**2*s2d/d1**2+(X3-2)**2*s2d/d2**2
s2y=(X3-X1)*s2a+(X3-X2)*s2a+(Y2-Y1)**2*s2d/d1**2+(Y3-2)**2*s2d/d2**2
s2xy=-(X3-X1)*(Y3-Y1)*s2a-(X3-X2)*(Y3-Y2)*s2a+(X2-X1)*(Y2-Y1)*s2d/d1**2+(X3-X2)*(Y3-Y2)*s2d/d2**2
write (8,*) ' Variancias-covariancias da poligonal nao compensada:'
write (8,*)
write (8,*) ' s2x=',s2x
write (8,*) ' s2y=',s2y
write (8,*) ' s2xy=',s2xy
write (8,*)
write (8,*) ' Desvios padrao correspondentes:'
write (8,*)
write (8,*) ' sx=',dsqrt(s2x)
write (8,*) ' sy=',dsqrt(s2y)
write (8,*) ' sxy=',dsqrt(s2xy)
write (8,*)
a=dsqrt((s2x+s2y+sqrt((s2x+s2y)**2-4.d0*(s2x*s2y-s2xy**2)))/2.d0)
b=dsqrt((s2x+s2y-sqrt((s2x+s2y)**2-4.d0*(s2x*s2y-s2xy**2)))/2.d0)
teta=0.5d0*atan(2.d0*s2xy/(s2x-s2y)**2)
write (8,*) ' Parametros da ellipse:'
write (8,*)
write (8,*) ' a=',a
write (8,*) ' b=',b
write (8,*) ' teta=',teta*180.d0/pi
write (8,*)
s2xc=(Y3c-Y1)*s2a+(Y3c-Y2c)*s2a+(X2c-X1)**2*s2d/d1c**2+(X3c-X2c)**2*s2d/d2c**2
s2yc=(X3c-X1)*s2a+(X3c-X2c)*s2a+(Y2c-Y1)**2*s2d/d1c**2+(Y3c-Y2c)**2*s2d/d2c**2
s2xyc=-(X3c-X1)*(Y3c-Y1)*s2a-(X3c-X2c)*(Y3c-Y2c)*s2a+(X2c-X1)*(Y2c-Y1)*s2d/d1c**2+(X3c-X2c)*(Y3c-Y2c)*s2d/d2c**2
write (8,*) ' Variancias-covariancias da poligonal compensada:'
write (8,*)
write (8,*) ' s2xc=',s2xc
write (8,*) ' s2yc=',s2yc
write (8,*) ' s2xyc=',s2xyc
write (8,*)
write (8,*) ' Desvios padrao correspondentes:'
write (8,*)
write (8,*) ' sxc=',dsqrt(s2xc)
write (8,*) ' syc=',dsqrt(s2yc)
write (8,*) ' sxyc=',dsqrt(s2xyc)
write (8,*)
ac=dsqrt((s2xc+s2yc+dsqrt((s2xc+s2yc)**2- 4.d0*(s2xc*s2yc-s2xyc**2)))/2.d0)

```



```

bc=dsqrt((s2xc+s2yc-dsqrt((s2xc+s2yc)**2-4.d0*(s2xc*s2yc-s2xyc**2)))/2.d0)
tetac=0.5d0*datan(2.d0*s2xyc/(s2xc-s2yc)**2)
write (8,*) ' Parametros compensados da elipse:'
write (8,*)
write (8,*) ' ac=',ac
write (8,*) ' bc=',bc
write (8,*) ' tetac=',tetac*180.d0/pi
write (8,*)
end

```

```

Angulos observados:
alfa1= 172.89277777777800
alfa2= 185.37055555555600
alfa3= 208.43861111111100
alfa4= 205.23083333333300
Azimutes nos pontos extremos:
A0= 68.255750000000010
A4= 300.19180555555600
Distancias observadas:
d1= 281.832000000000000
d2= 271.300000000000000
d3= 274.100000000000000
Azimutes transportados:
A1= 241.14852777777800
A2= 246.51908333333400
A3= 274.95769444444500
A4= 300.18852777777800
Coordenadas dos pontos extremos:
X1,Y1= 8478.13899999999000 2483.826000000000000
X4,Y4= 7709.336000000000000 2263.411000000000000
Coordenadas transportadas:
X1,Y1= 8478.13899999999000 2483.826000000000000
X2,Y2= 8231.289808931404000 2347.830584294984000
X3,Y3= 7982.455393156196000 2239.732834430286000
X4,Y4= 7709.380861607340000 2263.420599613462000
Erros de fecho:
eang= 3.277777777725532E-003
ex= -4.486160733995348E-002
ey= -9.599613461432455E-003
epla= 4.587718814109124E-002
Angulos compensados:
alfa1c= 172.89359722222200
alfa2c= 185.371375000000000
alfa3c= 208.43943055555600
alfa4c= 205.23165277777800
Azimutes compensados:
A1c= 241.14934722222200
A2c= 246.52072222222200
A3c= 274.96015277777800
A4c= 300.19180555555600
Coordenadas compensadas:
X2c,Y2c= 8231.274524904045000 2347.827313775637000
X3c,Y3c= 7982.425396262228000 2239.726415610181000
X4c,Y4c= 7709.336000000000000 2263.411000000000000
Distancias compensadas:
d1c= 281.846965069971300
d2c= 271.314748972425200
d3c= 274.070670193812400
Variâncias-covariâncias da poligonal não compensada:
s2x= 4.117165580518061E-004
s2y= 1.001803318719692E-004
s2xy= 1.878477172588689E-004
Desvios padrão correspondentes:
sx= 2.029079983765564E-002
sy= 1.000901253231153E-002
sxy= 1.370575489562209E-002
Parametros da elipse:
a= 2.236018995148547E-002
b= 3.452360823735477E-003

```

```
teta= 44.992599282629580
Variancias-covariancias da poligonal compensada:
s2xc= 4.117220716539262E-004
s2yc= 1.001748131668606E-004
s2xyc= 1.878424018387945E-004
Desvios padrao correspondentes:
sxc= 2.029093570178385E-002
syc= 1.000873684172287E-002
sxyz= 1.370556098227265E-002
Parametros compensados da elipse:
ac= 2.236017713732571E-002
bc= 3.452443078198877E-003
tetac= 44.992598549028430
```

5.

```
program weisbach

real*8 alfa1,alfa2,delta1,delta2

real*8 a,b1,c1,b2,c2,d

real*8 xa,ya,xb,yb

real*8 r_ba

real*8 beta1,beta2,gama1,gama2

real*8 pi

real*8 e1,e2

real*8 r_bp1,r_p1p2,r_p2c,r_cd

real*8 xp1,yp1,xp2,yp2,xc,yc,xd,yd

pi=4.d0*datan(1.d0)

c      angulo entre as direccoos BA e BP1
delta1=158.2492d0*pi/180.d0

c      angulo entre as direccoos BP1 e BP2
alfa1=35.7765d0*pi/180.d0

c      angulo entre as direccoos CD e CP1
delta2=131.8517d0*pi/180.d0

c      angulo entre as direccoos CP1 e CP2
alfa2=37.5886d0*pi/180.d0

c      distancia P1P2
a=2.934d0

c      catetos do triangulo a superficie
b1=5.008d0
```

```

c1=3.880d0
c      catetos do triangulo subterraneo
b2=4.737d0
c2=3.247d0
c      distancia CD
d=3.803d0
c      coordenadas dos pontos A e B
xa=25694.225d0
ya=69002.858d0
xb=28661.753d0
yb=52249.223d0
c      rumo da direccao BA
r_ba=atan((xa-xb)/(ya-yb))
if ((xa-xb).gt.0.d0.and.(ya-yb).gt.0.d0) r_ba=r_ba
if ((ya-yb).lt.0.d0) r_ba=r_ba+pi
if ((xa-xb).lt.0.d0.and.(ya-yb).gt.0.d0) r_ba=r_ba+2.d0*pi
write (*,*) ' Rba=',r_ba*180.d0/pi
write (*,*)
c      resolucao do triangulo a superficie
beta1=pi-dasin(b1/a*d sin(alfa1))
gama1=dasin(c1/a*d sin(alfa1))
c      erro de fecho
e1=pi-(alfa1+beta1+gama1)
c      angulos compensados
alfa1=alfa1+e1/3.d0
beta1=beta1+e1/3.d0
gama1=gama1+e1/3.d0
write (*,*) ' alfa1=',alfa1*180.d0/pi
write (*,*) ' beta1=',beta1*180.d0/pi
write (*,*) ' gama1=',gama1*180.d0/pi

```

```

write (*,*) ' e1  =',e1*180.d0/pi
write (*,*)
c          resolucao do triangulo subterraneo
beta2=pi-dasin(b2*dsin(alfa2)/a)
gama2=dsin(c2*dsin(alfa2)/a)
c          erro de fecho
e2=pi-(alfa2+beta2+gama2)
c          angulos compensados
alfa2=alfa2+e2/3.d0
beta2=beta2+e2/3.d0
gama2=gama2+e2/3.d0
write (*,*) ' alfa2=',alfa2*180.d0/pi
write (*,*) ' beta2=',beta2*180.d0/pi
write (*,*) ' gama2=',gama2*180.d0/pi
write (*,*) ' e2  =',e2*180.d0/pi
write (*,*)
pause
c          rumo da direccao BP1
r_bp1=r_ba+delta1-2.d0*pi
write (*,*) ' Rbp1=',r_bp1*180.d0/pi
write (*,*)
c          rumo da direccao P1P2
r_p1p2=r_bp1-pi+beta1
write (*,*) ' Rp1p2=',r_p1p2*180.d0/pi
write (*,*)
c          rumo da direccao P2C
r_p2c=r_p1p2+pi-beta2
write (*,*) ' Rp2c=',r_p2c*180.d0/pi
write (*,*)
c          rumo da direccao CD

```

```
r_cd=r_p2c+pi-delta2-alfa2
write (*,*) ' Rcd=',r_cd*180.d0/pi
write (*,*)
c      coordenadas do ponto P1
xp1=xb+c1*dsin(r_bp1)
yp1=yb+c1*dcos(r_bp1)
write (*,*) ' xp1=',xp1,' ;yp1=',yp1
write (*,*)
c      coordenadas do ponto P2
xp2=xp1+a*dsin(r_p1p2)
yp2=yp1+a*dcos(r_p1p2)
write (*,*) ' xp2=',xp2,' ;yp2=',yp2
write (*,*)
c      coordenadas do ponto C
xc=xp2+c2*dsin(r_p2c)
yc=yp2+c2*dcos(r_p2c)
write (*,*) ' xc= ',xc,' ;yc= ',yc
write (*,*)
c      coordenadas do ponto D
xd=xc+d*dsin(r_cd)
yd=yc+d*dcos(r_cd)
write (*,*) ' xd= ',xd,' ;yd= ',yd
write (*,*)
end
```

```
Rba= 349.955527680363100
alfa1= 35.730954275701280
beta1= 93.679364447558580
gama1= 50.589681276740160
e1 = -1.366371728961498E-001
alfa2= 37.575950614243130
beta2= 99.977798757646570
gama2= 42.446250628110290
e2 = -3.794815727061823E-002
Rbp1= 148.204727680363100
Rp1p2= 61.884092127921690
Rp2c= 141.906293370275100
Rcd= 152.478642756032000
xp1= 28663.797316384110000
yp1= 52245.925247656100000
xp2= 28666.385092818420000
yp2= 52247.307915051410000
xc= 28668.388327632070000
yc= 52244.752516984310000
xd= 28670.145614898830000
yd= 52241.379869587660000
```

Para a obtenção dos melhores resultados, as estações B e C devem estar situadas o mais próximo possível dos pontos  $P_1$  e  $P_2$ , respectivamente, e praticamente no mesmo alinhamento desses dois pontos; a distância  $P_1P_2$  deve ser a maior possível e os ângulos  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  (da ordem de  $30'$ ) devem ser medidos com grande rigor.

6.

$$\frac{a}{\sin \alpha_1} = \frac{c_1}{\sin \gamma_1} = \frac{b_1}{\sin \beta_1} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_1 = a \sin\left(\frac{c_1}{a} \sin \alpha_1\right) = \begin{cases} 30^\circ.9864 \\ 149^\circ.0136 \end{cases} \\ \beta_1 = a \sin\left(\frac{b_1}{a} \sin \alpha_1\right) = \begin{cases} 37^\circ.4012 \\ 142^\circ.5988 \end{cases} \end{cases}$$

$$\varepsilon_1 = (180^\circ - 6^\circ.4156 - 30^\circ.9864 - 142^\circ.5988) = -0^\circ.0008$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = \alpha_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} = 6^\circ.4153 \\ \beta_1 = \beta_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} = 142^\circ.5985 \\ \gamma_1 = \gamma_1 + \frac{\varepsilon_1}{3} = 30^\circ.9861 \end{cases}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha_2} = \frac{c_2}{\sin \gamma_2} = \frac{b_2}{\sin \beta_2} \Rightarrow \begin{cases} \gamma_2 = a \sin\left(\frac{c_2}{a} \sin \alpha_2\right) = \begin{cases} 29^\circ.1782 \\ 150^\circ.8218 \end{cases} \\ \beta_2 = a \sin\left(\frac{b_2}{a} \sin \alpha_2\right) = \begin{cases} 48^\circ.2716 \\ 131^\circ.7284 \end{cases} \end{cases}$$

$$\varepsilon_2 = (180^\circ - 19^\circ.0942 - 29^\circ.1782 - 131^\circ.7284) = -0^\circ.0008$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = \alpha_2 + \frac{\varepsilon_2}{3} = 19^\circ.0939 \\ \beta_2 = \beta_2 + \frac{\varepsilon_2}{3} = 131^\circ.7281 \\ \gamma_2 = \gamma_2 + \frac{\varepsilon_2}{3} = 29^\circ.1779 \end{cases}$$

$$R_{AB} = a \tan \frac{M_B - M_A}{P_B - P_A} = 122^\circ.7352$$

$$R_{BP_1} = R_{AB} - 180^\circ + \delta_1 = 111^\circ.3181$$

$$R_{P_1P_2} = R_{BP_1} + 180^\circ - \gamma_1 = 260^\circ.3320$$

$$R_{P_2C} = R_{P_1P_2} - 180^\circ + \gamma_2 = 109^\circ.5099$$

$$R_{CD} = R_{P_2C} - 180^\circ + \alpha_2 + \delta_2 = 70^\circ.9971$$

$$M_{P_1} = M_B + b_1 \sin R_{BP_1} = 185.222 \text{ m}$$

$$P_{P_1} = P_B + b_1 \cos R_{BP_1} = 149.060 \text{ m}$$

$$M_{P_2} = M_{P_1} + a \cos R_{P_1P_2} = 182.259 \text{ m}$$

$$P_{P_2} = P_{P_1} + a \cos R_{P_1P_2} = 148.555 \text{ m}$$

$$M_C = M_{P_2} + b_2 \sin R_{P_2C} = 188.723 \text{ m}$$

$$P_C = P_{P_2} + b_2 \cos R_{P_2C} = 146.265 \text{ m}$$

$\sigma_{R_{CD}}^2 = \sigma_{\delta_1}^2 + \sigma_{\gamma_1}^2 + \sigma_{\gamma_2}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\delta_2}^2 + \varepsilon_P^2$ , onde  $\sigma_{\delta_1}^2, \sigma_{\delta_2}^2$  e  $\sigma_{\alpha_2}^2$  representam a variância dos ângulos observados e  $\varepsilon_P^2$  representa a influência das deflexões dos fios de prumo, consideradas como desvios relativamente à vertical e estimadas a partir dos erros devidos às correntes de ar, à forma espiralada dos cabos e à determinação da posição média dos cabos na gradação; a variância dos ângulos calculados e utilizados na propagação dos rumos ( $\gamma_1$  e  $\gamma_2$ ) é obtida da forma seguinte:

$$\text{a) de } \sin \gamma = \frac{c \sin \alpha}{a} \Rightarrow \gamma = a \sin \left( \frac{c \sin \alpha}{a} \right)$$

b) da lei de propagação das variâncias-covariâncias, sendo

$$y = y(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow \sigma_y^2 = \left( \frac{\partial y}{\partial x_1} \right)^2 \sigma_{x_1}^2 + \left( \frac{\partial y}{\partial x_2} \right)^2 \sigma_{x_2}^2 + \dots + \left( \frac{\partial y}{\partial x_n} \right)^2 \sigma_{x_n}^2$$

$$\text{c) } \frac{d}{dx} a \sin u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$$

Então:

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^2 &= \left( \frac{\partial \gamma}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha} \right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial c} \left( a \sin \frac{c \sin \alpha}{a} \right) \right)^2 \sigma_c^2 + \left( \frac{\partial}{\partial a} \left( a \sin \frac{c \sin \alpha}{a} \right) \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( a \sin \frac{c \sin \alpha}{a} \right) \right)^2 \sigma_\alpha^2 = \\ &= \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{c \sin \alpha}{a} \right)^2}} \frac{a \sin \alpha}{a^2} \right)^2 \sigma_c^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{c \sin \alpha}{a} \right)^2}} \frac{(-c \sin \alpha)}{a^2} \right)^2 \sigma_a^2 + \left( \frac{1}{\sqrt{1 - \left( \frac{c \sin \alpha}{a} \right)^2}} \frac{c \sin \alpha}{a^2} \right)^2 \sigma_\alpha^2 \\ &= \frac{\sin^2 \alpha}{a^2 - c^2 \sin^2 \alpha} \sigma_c^2 + \frac{c^2 \sin^2 \alpha}{a^2 (a^2 - c^2 \sin^2 \alpha)} \sigma_a^2 + \frac{c^2 (1 - \sin^2 \alpha)}{(a^2 - c^2 \sin^2 \alpha)} \sigma_\alpha^2 \\ &= \frac{\left( \frac{a}{c} \sin \gamma \right)^2}{a^2 - c^2 \left( \frac{a}{c} \sin \gamma \right)^2} \sigma_c^2 + \frac{c^2 \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \gamma}{a^2 (a^2 - c^2 \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \gamma)} \sigma_a^2 + \frac{c^2 (1 - \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \gamma)}{(a^2 - c^2 \frac{a^2}{c^2} \sin^2 \gamma)} \sigma_\alpha^2 \\ &= \frac{\frac{a^2}{c^2} \sin^2 \gamma}{a^2 (1 - \sin^2 \gamma)} \sigma_c^2 + \frac{\sin^2 \gamma}{a^2 (1 - \sin^2 \gamma)} \sigma_a^2 + \frac{c^2 - a^2 \sin^2 \gamma}{a^2 \cos^2 \gamma} \sigma_\alpha^2 \\ &= \frac{\tan^2 \gamma}{c^2} \sigma_c^2 + \frac{\tan^2 \gamma}{a^2} \sigma_a^2 + \left( \frac{c^2}{a^2 \cos^2 \gamma} - \tan^2 \gamma \right) \sigma_\alpha^2, \text{ donde} \end{aligned}$$



$$\sigma_{\gamma_1}^2 = \frac{(\tan 30^\circ.9861)^2}{13.850^2} (0.005 \times \frac{3600 \times 180}{\pi})^2 + \frac{(\tan 30^\circ.9861)^2}{3.006^2} (0.002 \times \frac{3600 \times 180}{\pi})^2 + \left( \frac{13.850^2}{3.006^2 \times (\cos 30^\circ.9861)^2} - (\tan 30^\circ.9861)^2 \right) (10'')^2 =$$

$$= 1999''.68 + 6792''.41 + 2852''.38 = 11644''.47$$

$$\sigma_{\gamma_2}^2 = \frac{(\tan 29^\circ.1779)^2}{4.480^2} (0.005 \times \frac{3600 \times 180}{\pi})^2 + \frac{(\tan 29^\circ.1779)^2}{3.006^2} (0.002 \times \frac{3600 \times 180}{\pi})^2 + \left( \frac{4.480^2}{3.006^2 \times (\cos 29^\circ.1779)^2} - (\tan 29^\circ.1779)^2 \right) (10'')^2 =$$

$$= 16522''.90 + 5871''.98 + 260''.19 = 22656''.07$$

Neste caso, a precisão dos ângulos observados,  $\sigma_{\delta_1}, \sigma_{\delta_2}, \sigma_{\alpha_2}$ , é igual a 10'', a precisão das distâncias observadas,  $\sigma_b$  é igual a 0.005 m e  $\sigma_a$  é igual a 0.002 m e a precisão na verticalização dos fios de prumo,  $\sigma_p$ , é igual a 10''; assim, a precisão no rumo

final é igual a  $\sigma_{R_{CD}} = \sqrt{\sigma_{\delta_1}^2 + \sigma_{\gamma_1}^2 + \sigma_{\gamma_2}^2 + \sigma_{\alpha_2}^2 + \sigma_{\delta_2}^2 + \epsilon_p^2} = \sqrt{100'' + 11644''.47 + 22656.07 + 100 + 100} = 186''.01$

7.

```

program hause
real*8 xa,ya,xb,yb
real*8 r_ba
real*8 c,b,a,d,e1
real*8 alfa,beta
real*8 beta1,beta2
real*8 r_bp1,r_p1p2,r_p2c,r_cd
real*8 pi
real*8 xp1,yp1,yp2,xc,yc,xd,yd
real*8 delta1,delta2,gama1,gama2
real*8 cp1,dp2,cp2
real*8 omega,omega1,omega2,omega3
pi=4.d0*datan(1.d0)
c pontos A (ponto visado) e B (ponto estacao) de coordenadas conhecidas
xa=45197.409d0
ya=52152.550d0
xb=45200.583d0
yb=52150.775d0
c angulo entre as direccoos BA e BP2
alfa=122.4902*pi/180.d0
c angulo entre as direccoos BP2 e BP1
beta=35.7769*pi/180.d0
c distancia BP1
b=3.878d0
c distancia BP2
c=5.008d0
c distancia P1P2
a=2.934d0
c angulo entre as direccoos CP1 e CD
delta1=77.8607d0*pi/180.d0
c angulo entre as direccoos CP2 e CD
delta2=49.7995d0*pi/180.d0
c angulo entre as direccoos DC e DP1
gama2=53.6156d0*pi/180.d0
c angulo entre as direccoos DC e DP2
gama1=81.2553d0*pi/180.d0
c distancia CD
d=4.717d0
c resolucao do triangulo a superficie
beta1=pi-dasin(c/a*d*sin(beta))
beta2=dasin(b/a*d*sin(beta))
c erro de fecho
e1=pi-(beta+beta1+beta2)
c angulos compensados
beta=beta+e1/3.d0
beta1=beta1+e1/3.d0
beta2=beta2+e1/3.d0
    
```

```

write (*,*) ' beta=',beta*180.d0/pi
write (*,*) ' beta1=',beta1*180.d0/pi
write (*,*) ' beta2=',beta2*180.d0/pi
write (*,*) ' e1  =',e1*180.d0/pi
write (*,*)
c
rumo da direccao BA
r_ba=atan((xa-xb)/(ya-yb))
if ((xa-xb).gt.0.d0.and.(ya-yb).gt.0.d0) r_ba=r_ba
if ((ya-yb).lt.0.d0) r_ba=r_ba+pi
if ((xa-xb).lt.0.d0.and.(ya-yb).gt.0.d0) r_ba=r_ba+2.d0*pi
write (*,*) ' Rba=',r_ba*180.d0/pi
write (*,*)
c
rumo da direccao BP1
r_bp1=r_ba+alfa+beta-2.d0*pi
write (*,*) ' Rbp1=',r_bp1*180.d0/pi
write (*,*)
c
rumo da direccao BP2
r_p1p2=r_bp1-(pi-beta1)
write (*,*) ' Rp1p2=',r_p1p2*180.d0/pi
write (*,*)
c
coordenadas relativas do ponto C
xc=0.d0
yc=0.d0
c
distancia CP1
cp1=d*dsin(gama2)/dsin(pi-delta1-gama2)
c
coordenadas relativas do ponto P1
xp1=xc+cp1*cos(delta1)
yp1=yc+cp1*dsin(delta1)
c
coordenadas relativas do ponto D
xd=d
yd=0.d0
c
distancia DP2
dp2=d*dsin(delta2)/dsin(pi-delta2-gama1)
c
coordenadas relativas do ponto P2
xp2=xd-dp2*cos(gama1)
yp2=yd+dp2*dsin(gama1)
c
distancia CP2
cp2=dsqrt((xc-xp2)**2+(yc-yp2)**2)
c
angulo omega
omega=atan(((yc-yp2)*(xp1-xp2)-(xc-xp2)*(yp1-yp2))/((yc-yp2)*(yp1-yp2)+(xc-xp2)*(xp1-xp2)))
c
determinacao alternativa do angulo omega
omega1=atan((xp2-xc)/(yp2-yc))
if ((xp2-xc).gt.0.d0.and.(yp2-yc).gt.0.d0) omega1=omega1
if ((yp2-yc).lt.0.d0) omega1=omega1+pi
if ((xp2-xc).lt.0.d0.and.(yp2-yc).gt.0.d0) omega1=omega1+2.d0*pi
omega2=atan((xp2-xp1)/(yp2-yp1))
if ((xp2-xp1).gt.0.d0.and.(yp2-yp1).gt.0.d0) omega2=omega2
if ((yp2-yp1).lt.0.d0) omega2=omega2+pi
if ((xp2-xp1).lt.0.d0.and.(yp2-yp1).gt.0.d0) omega2=omega2+2.d0*pi
omega3=omega2-omega1
write (*,*) ' omega=',omega*180.d0/pi
write (*,*) ' omega=',omega3*180.d0/pi
write (*,*)
c
rumo da direccao P2C
r_p2c=r_p1p2+pi-omega
write (*,*) ' Rp2c=',r_p2c*180.d0/pi
write (*,*)
c
rumo da direccao CD
r_cd=r_p2c-(pi-delta2)
write (*,*) ' Rcd=',r_cd*180.d0/pi
write (*,*)
c
coordenadas do ponto P1
xp1=xb+b*dsin(r_bp1)
yp1=yb+b*cos(r_bp1)
write (*,*) ' xp1=',xp1,';yp1=',yp1
write (*,*)
c
coordenadas do ponto P2
xp2=xp1+a*dsin(r_p1p2)
yp2=yp1+a*cos(r_p1p2)
write (*,*) ' xp2=',xp2,';yp2=',yp2

```

```

write (*,*)
c
  coordenadas do ponto C
  xc=xp2+cp2*d*sin(r_p2c)
  yc=yp2+cp2*d*cos(r_p2c)
  write (*,*) 'xc= ',xc,' ;yc= ',yc
  write (*,*)
c
  coordenadas do ponto D
  xd=xc+d*d*sin(r_cd)
  yd=yc+d*d*cos(r_cd)
  write (*,*) 'xd= ',xd,' ;yd= ',yd
  write (*,*)
end
    
```

```

beta= 35.745845529613960
beta1= 93.685291812733520
beta2= 50.568862657652530
e1 = -9.316714650970502E-002
Rba= 299.215284665259100
Rbp1= 97.451326422900290
Rp1p2= 11.136618235633800
omega= 54.353114420637530
Rp2c= 136.783503814996200
Rcd= 6.583003814996262
xp1= 45204.428251792580000
yp1= 52150.272085840630000
xp2= 45204.994951193060000
yp2= 52153.150836922180000
xc= 45209.228512983410000
yc= 52148.645151837300000
xd= 45209.769281523590000
yd= 52153.331051792050000
    
```

8.

```

real*8 x1,y1,x2,y2
real*8 d1,d2,d3,d4
real*8 alfa,beta,gama
real*8 pi
real*8 r_12,d12
real*8 d1a,d2a,d3a,d4a
real*8 H,R
real*8 xa,ya,xb,yb,xc,yc,x2a,y2a
real*8 r_1a,r_ab,r_bc,r_c2,r_12a,d12a
real*8 omega,lambda

pi=4.d0*datan(1.d0)
c
  profundidade dos pocos
H=456.123d0
c
  R=raio medio terrestre
R=6378140.d0
c
  coordenadas dos fios de prumo nos dois pocos
x1=25558.257d0
y1=65769.466d0
x2=26585.111d0
y2=66117.494d0
c
  distancias observadas na poligonal subterranea
d1=347.092d0
d2=395.622d0
d3=312.972d0
d4=351.828d0
c
  angulos observados na poligonal subterranea
alfa=163.8497d0*pi/180.d0
beta=96.7161d0*pi/180.d0
gama=153.7702d0*pi/180.d0
c
  rumo e distancia P1P2
R_12=atan((x2-x1)/(y2-y1))
if ((x2-x1).gt.0.d0.and.(y2-y1).gt.0.d0) R_12=R_12
if ((y2-y1).lt.0.d0) R_12=R_12+pi
    
```

```

if ((x2-x1).lt.0.d0.and.(y2-y1).gt.0.d0) R_12=R_12+2.d0*pi
d12=dsqrt((x2-x1)**2+(y2-y1)**2)
c      distancias reduzidas a superficie
d1a=d1+d1*H/R
d2a=d2+d2*H/R
d3a=d3+d3*H/R
d4a=d4+d4*H/R
c      calculo da poligonal subterranea, considerando
c      como eixo das abcissas a direccao 1a
R_1a=pi
xa=x1+d1a*dsin(R_1a)
ya=y1+d1a*dcos(R_1a)
R_ab=R_1a-pi+alfa
xb=xa+d2a*dsin(R_ab)
yb=ya+d2a*dcos(R_ab)
R_bc=R_ab-pi+beta
xc=xb+d3a*dsin(R_bc)
yc=yb+d3a*dcos(R_bc)
R_c2=R_bc-pi-gama
x2a=xc+d4a*dsin(R_c2)
y2a=yc+d4a*dcos(R_c2)
R_12a=datan((x2a-x1)/(y2a-y1))
if ((x2a-x1).gt.0.d0.and.(y2a-y1).gt.0.d0) R_12a=R_12a
if ((y2a-y1).lt.0.d0) R_12a=R_12a+pi
if ((x2a-x1).lt.0.d0.and.(y2a-y1).gt.0.d0) R_12a=R_12a+2.d0*pi
d12a=dsqrt((x2a-x1)**2+(y2a-y1)**2)
c      rotacao e escala do 2 referencial subterraneo
omega=R_12a-R_12
write (*,*) ' Rotacao dos 2 referenciais=',omega*180.d0/pi
write (*,*)
c      escala dos dois referenciais
lambda=d12a/d12
write (*,*) ' Escala dos 2 referenciais=',lambda
write (*,*)
c      calculo da poligonal subterranea
R_1a=pi-omega
xa=x1+d1a*dsin(R_1a)
ya=y1+d1a*dcos(R_1a)
write (*,*) ' xa=',xa
write (*,*) ' ya=',ya
write (*,*)
R_ab=R_1a-pi+alfa
xb=xa+d2a*dsin(R_ab)
yb=ya+d2a*dcos(R_ab)
write (*,*) ' xb=',xb
write (*,*) ' yb=',yb
write (*,*)
R_bc=R_ab-pi+beta
xc=xb+d3a*dsin(R_bc)
yc=yb+d3a*dcos(R_bc)
write (*,*) ' xc=',xc
write (*,*) ' yc=',yc
write (*,*)
R_c2=R_bc-pi-gama
x2a=xc+d4a*dsin(R_c2)
y2a=yc+d4a*dcos(R_c2)
write (*,*) ' x2=',x2a
write (*,*) ' y2=',y2a
write (*,*)
end
    
```

```

Rotacao dos 2 referenciais= 64.539798481081450
Escala dos 2 referenciais= 1.000001157388409
xa= 25871.663261236630000
ya= 65620.246016872070000
    
```

xb= 26262.101958575470000  
 yb= 65556.239943544760000  
 xc= 26348.511431678160000  
 yc= 65857.070271046540000  
 x2= 26585.112188468920000  
 y2= 66117.494402803600000

9.

a) como regra, o cabo utilizado deve ser o mais fino possível e o prumo utilizado deve ser o mais pesado possível, de tal forma que sendo a profundidade H dada em m, o peso em kg é dado por  $P = \frac{H}{3} = 100$  kg; por razões de segurança, o peso suspenso não deve exceder metade da tensão máxima (de rotura) do cabo; assim, sendo a tensão máxima do cabo utilizado igual a 200 kg/mm<sup>2</sup>, para um prumo de 100 kg de peso deve ter-se um cabo com secção igual a 1 mm<sup>2</sup>, a que corresponde um diâmetro de 1.13 mm (se para a tensão máxima, 200 kg correspondem a uma secção de 1 mm<sup>2</sup>, para metade da tensão máxima tem-se que 100 kg correspondem a uma secção de 1 mm<sup>2</sup>).

b) sendo  $\Delta H = \frac{PH}{aE}$ , onde  $\Delta H$  é a distância entre as duas plataformas no fundo da mina, P é o peso do prumo, H a profundidade da mina (em m), a a secção transversal do cabo (em cm<sup>2</sup>),  $E=2.1 \times 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>, tem-se

$$\Delta H = \frac{100 \text{ kg} \times 300 \text{ m}}{0.01 \text{ cm}^2 \times 2.1 \times 10^6 \text{ kg cm}^{-2}} = 1.4 \text{ m}$$

c) o período de oscilação do fio de prumo é dado por  $T = 2\pi \sqrt{\frac{H}{100 \times g}} = 3.5 \text{ s.}$

d) a deflexão induzida pela corrente de ar é dada por

$$e = \frac{30 \times h \times H \times d \times v^2}{P} = \frac{30 \times 5 \times 300 \times 1.13 \times 10^{-3} \times 1}{100} = 0.5 \text{ mm,}$$

sendo o erro induzido pela forma espiralada do cabo é dado por  $r = \frac{\pi d^4 E}{64 R P} = \frac{\pi \times 0.113^4 \times 2.1 \times 10^6}{64 \times 15 \times 100} = 0.01 \text{ mm}$